Exercice 1 (Inéquation). *L'objet de l'exercice est de résoudre l'inéquation suivante.*

$$2x^3 - 4x^2 - 10x - 24 \geqslant 0$$

C'est une inéquation du troisième degré, sans factorisation évidente, donc nous ne connaissons pas de méthode générale pour la résoudre.
On pose $f : x \mapsto 2x^3 - 4x^2 - 10x - 24$.

1. *En utilisant la dérivée, montrez que le tableau de variations de f est le suivant.*

   Commençons par dériver la fonction f.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^3 - 4x^2 - 10x - 24 \\ f'(x) &= 2 \times 3x^2 - 4 \times 2x - 10 \\ &= 6x^2 - 8x - 10 \end{aligned}$$

   Donc f' est un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 6 \times (-10) = 304$. Il est positif, donc il y a deux solutions :

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{-(-8)-\sqrt{304}}{2\times 6} = \tfrac{8-4\sqrt{19}}{12} = \tfrac{2-\sqrt{19}}{3} \\ x_2 &= \tfrac{-(-8)+\sqrt{304}}{2\times 6} = \tfrac{8+4\sqrt{19}}{12} = \tfrac{2+\sqrt{19}}{3} \end{aligned}$$

   Nous pouvons donc tracer le tableau de signes de f', et en déduire le tableau des variations.

x	$-\infty$		$\frac{2-\sqrt{19}}{3}$		$\frac{2+\sqrt{19}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	-19,6	$\searrow$	-44,1	$\nearrow$	

2. *Complétez, sur le tableau précédent, les valeurs approchées des extremums de f (avec une précision qui vous semble pertinente).* Nous avons calculé $f\left(\frac{2-\sqrt{19}}{3}\right) \approx -19,6$, et $f\left(\frac{2+\sqrt{19}}{3}\right) \approx -44,1$, et reporté les données sur le tableau de variations de la question précédente.

3. *Calculez $f(4)$.*

$$f(4) = 2 \times 4^3 - 4 \times 4^2 - 10 \times 4 - 24 = 0$$

4. *En déduire les solutions de l'inéquation.*
D'une part, sur l'intervalle $\left]-\infty; \frac{2+\sqrt{19}}{3}\right]$, le maximum de la fonction f est $-19,6$ environ, donc l'inéquation $f(x) \geqslant 0$ n'a pas de solutions. D'autre part, sur l'intervalle $\left[\frac{2+\sqrt{19}}{3}; +\infty\right[$, la fonction f est strictement croissante, et passe par 0 en $x = 4$. Donc sur cet intervalle (et sur l'ensemble des réels), les solutions de $f(x) \geqslant 0$ sont $\boxed{x \geqslant 4}$.

Exercice 2 (Optimisation)**.** *On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f par $f(x) = \frac{1+x}{1+x^2}$. L'objet de l'exercice est de déterminer ses extremums.*

1. *Montrez que pour tout x de son domaine de définition, on a :*

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 2x + 1}{\left(1 + x^2\right)^2}$$

La fonction f est de la forme $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, avec :

$$\begin{array}{ll} u(x) = 1 + x & v(x) = 1 + x^2 \\ u'(x) = 1 & v'(x) = 2x \end{array}$$

Nous calculons donc sa dérivée avec la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 \times (1 + x^2) - 2x \times (1 + x)}{\left(1 + x^2\right)^2} \\ &= \frac{1 + x^2 - 2x - 2x^2}{\left(1 + x^2\right)^2} \\ &= \frac{-x^2 - 2x + 1}{\left(1 + x^2\right)^2} \end{aligned}$$

2. *Recopiez et complétez le tableau de signes suivant, en justifiant.*

D'une part, le numérateur $-x^2 - 2x + 1$ est un polynôme de second degré, de discriminant $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 8$, et de racines $x_1 = \frac{-(-2)-\sqrt{8}}{2\times(-1)} = -1 + \sqrt{2}$ et $x_1 = \frac{-(-2)+\sqrt{8}}{2\times(-1)} = -1 - \sqrt{2}$.

D'autre part, le dénominateur $\left(1+x^2\right)^2$ est un carré, donc il est toujours strictement positif.

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$-x^2-2x+1$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$\left(1+x^2\right)^2$		$+$		$+$		$+$	
$f'(x) = \frac{x^2+2x-1}{\left(1+x^2\right)^2}$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		↘	-0,2	↗	1,2	↘	

3. *En déduire le tableau de variations de f (n'oubliez pas de calculer la valeur des extremums, arrondies au dixième).*
   Fait dans la question précédente.
4. *Donnez les extremums de f, en précisant pour quelles valeurs de x ils sont atteints, ainsi que s'il s'agit d'extremums locaux ou globaux.*
   Le nombre 1,2 est un maximum local de f, atteint en $x = -1 + \sqrt{2}$.
   Le nombre 0,2 est un minimum local de f, atteint en $x = -1 - \sqrt{2}$.
   Nous ne savons pas si ces extremums sont des extremums globaux ou pas, car nous ne connaissons pas le comportement de f en $-\infty$ et $+\infty$ (vous verrez cela l'an prochain).

Exercice 3 (Un chouïa au delà de ce que je peux vous demander en devoir)**.**
L'objet de l'exercice est d'écrire une fonction en Python qui donne les variations des fonctions homographiques de la forme $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ (avec $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$).
Soit f une telle fonction.

1. *Quel est le domaine de définition de f ?*
   La fonction f est un quotion, donc elle est définie si son dénominateur ne s'annule pas, c'est-à-dire si $cx+d \neq 0$, c'est-à-dire si $x \neq -\frac{d}{c}$. Donc f est définie sur tous les nombres réels, sauf $-\frac{d}{c}$, que l'on peut aussi noter $\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{d}{c}\right\}$.
2. *Montrez que pour tout x de son domaine de définition, on a :*

$$f'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

   La fonction f peut s'écrire sous la forme $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, avec

$$\begin{array}{ll} u(x) = ax+b & v(x) = cx+d \\ u'(x) = a & v'(x) = c \end{array}$$

   Donc sa dérivée est :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{a \times (cx+d) - c \times (ax+b)}{(cx+d)^2} \\ &= \frac{acx + ad - acx - bc}{(cx+d)^2} \\ &= \frac{ad-bc}{(cx+d)^2} \end{aligned}$$

3. *Dressez le tableau de signes de f' ainsi que le tableau de variations de f.* ⚠️ *Attention : Il y a deux cas possibles.*
   Commençons par remarquer que puisque le dénominateur $(cx+d)^2$ est un carré, il est toujours positif.

   Premier cas : $ad-bc > 0$ Alors le quotient $f'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ est un quotient de deux nombres strictement positifs : il est lui même positif. Donc $f'(x) > 0$, et la fonction f est strictement croissante sur chacun des intervalles de son domaine de définition.

Deuxième cas : $ad - bc < 0$ Alors le quotient $f'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ est un quotient d'un nombre strictement négatif, et d'un nombre strictement positif : il est donc strictement négatif. Donc $f'(x) < 0$, et la fonction f est strictement décroissante sur chacun des intervalles de son domaine de définition.

4. *Complétez la fonction Python suivante, qui affiche (en une phrase) les variations de f, en fonction des paramètres a, b, c, d de f.* ⚠ *Attention : la phrase affichée dans cette ébauche de fonction n'est qu'un exemple, et sera probablement réécrite entièrement.*

```
def variations_homographiques(a, b, c, d):
    if a*d-b*c > 0:
        print("La fonction f est strictement
           croissante jusqu'à -d/c, puis
           strictement croissante après.")
    else:
        print("La fonction f est strictement
           décroissante jusqu'à -d/c, puis
           strictement décroissante après.")
```