Exercice 1. *Pour chacune des suites u suivantes : (i) calculer u_2 ; (ii) calculer le troisième terme ; (iii) calculer le terme de rang 4. Arrondir les résultats au centième si nécessaire.*

1. *La suite u de premier terme $u_0 = 3$ et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = 2u_n - 1$.*

   Calculons les premiers termes de u.

   - Premier terme : $u_0 = 3$.
   - Second terme : $u_1 = 2u_0 - 1 = 2 \times 3 - 1 = 5$.
   - Troisième terme : $u_2 = 2u_1 - 1 = 2 \times 5 - 1 = 9$.
   - Quatrième terme : $u_3 = 2u_2 - 1 = 2 \times 9 - 1 = 17$.
   - Cinquième terme : $u_4 = 2u_3 - 1 = 2 \times 17 - 1 = 33$.

   Donc :

   (i) $u_2 = 9$;
   (ii) le troisième terme est $u_2 = 9$;
   (iii) le terme de rang 4 est $u_4 = 33$.

2. *La suite u définie pour $n \geqslant 1$ par $u_n = \frac{1}{2n}$.*

   (i) $u_2 = \frac{1}{2\times 2} = \frac{1}{4}$
   (ii) Puisque le premier terme est u_1, le troisième terme est $u_3 = \frac{1}{2\times 3} = \frac{1}{6}$.
   (iii) Le terme de rang 4 est $u_4 = \frac{1}{2\times 4} = \frac{1}{8}$.

Exercice 2. *On considère les suites u et v définies sur $\mathbb{N}$ par :*

$$u_n = \frac{4^n}{9} \text{ et } \begin{cases} v_0 &= 7 \\ v_{n+1} &= 2v_n - 3 \end{cases}$$

1. *Prouver que u est géométrique.*

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{4^{n+1}}{9}}{\frac{4^n}{9}} \\ &= \frac{4^{n+1} \times \cancel{9}}{4^n \times \cancel{9}} \\ &= 4^{n+1-n} \\ &= 4 \end{aligned}$$

   Donc la suite u est géométrique de raison 4.

2. *Prouver que v n'est pas arithmétique.*

   Calculons les premiers termes :

   - $v_0 = 7$;
   - $v_1 = 2 \times v_0 - 3 = 2 \times 7 - 3 = 11$;
   - $v_2 = 2 \times v_1 - 3 = 2 \times 11 - 3 = 29$.

   Donc $v_2 - v_1 = 29 - 11 = 18$, et $v_1 - v_0 = 11 - 7 = 4$. Ainsi, $v_2 - v_1 \neq v_1 - v_0$, et la suite n'est pas arithmétique.

Exercice 3. *On considère une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r tous les deux inconnus. On sait en revanche que $u_{42} + u_{256} = 454$, et que $u_{101} = 149$.*

1. *Exprimer u_{42} et u_{256} en fonction de u_{101}.*

   On a :

   - $u_{42} = u_{101} + r \times (42 - 101) = u_{101} - 59r$
   - $u_{256} = u_{101} + r \times (256 - 101) = u_{101} + 155r$

2. *En déduire que $298 + 96r = 454$.* Puisque $u_{42} + u_{256} = 454$, alors :

$$\begin{aligned} u_{42} + u_{256} &= 454 \\ u_{101} - 59r + u_{101} + 155r &= 454 \\ 2u_{101} + 96r &= 454 \\ 2 \times 149 + 96r &= 454 \\ 298 + 96r &= 454 \end{aligned}$$

3. *En déduire les valeurs de u_0 et r.* Puisque $298 + 96r = 454$, alors $96r = 156$ et $r = \frac{156}{96} = 1,625$. Et donc :

$$\begin{aligned} u_0 &= u_{101} + (0 - 101) \times r \\ &= 149 - 101 \times 1,625 \\ &= -15,125 \end{aligned}$$

Exercice 4. *On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par :*

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \textit{Pour tout } n \in \mathbb{N} \textit{ : } u_{n+1} = 1,4u_n - 1,5 \end{cases}$$

On admet que cette suite est décroissante, et on souhaite connaître le rang du premier terme négatif. Nous allons répondre à cette question de deux manières différentes.

1. *Python : Complétez la fonction ci-contre pour qu'elle renvoit le résultat demandé.*

```
def suite():
    n = 0
    u = 3
    while u > 0:
        u = 1.4*u-1.5
        n = n + 1
    return n
```

2. *Calculatrice : Sans justifier, à l'aide du module suites de votre calculatrice, répondre au problème.*

   On obtient : $n = 5$.

Exercice 5. *À partir de ses dix ans, les parents de Lena lui donnent 10€ chaque mois l'année de ses dix ans, puis 11€ chaque mois l'année de ses 11 ans, et ainsi de suite jusqu'à l'année de ses 25 ans (incluse). L'objet de l'exercice est de calculer la somme totale reçue par Lena.*
On note u la suite définie par « u_n est la somme reçue par Lena durant sa n^e année ». On admet que u est une suite arithmétique.

1. *Justifier que le premier terme est $u_{10} = 120$, et sa raison est 12.*

   L'année de ses dix ans, Lena gagne 10€ par mois pendant douze mois, soit $12 \times 10 = 120$ euros.

   Chaque année, elle gagne 1€ par mois de plus que l'année précédente, soit 12€ de plus sur toute l'année. Donc la raison est 12.

2. *Déterminer la somme d'argent reçue par Lena entre l'année de ses 10 ans et la fin de l'année de ses 25 ans.*

   On cherche la somme des termes de u_{10} à u_{25}. On sait que $u_{10} = 120$; calculons u_{25}.

$$u_{25} = u_{10} + (25 - 10) \times 12 = 120 + 15 \times 12 = 300$$

$$\begin{aligned}
u_{10} + u_{11} + \ldots + u_{25} &= 16 \times \frac{u_{10} + u_{25}}{2} \\
&= 16 \times \frac{120 + 300}{2} \\
&= 3360
\end{aligned}$$

Elle recevra au total 3 360 €.

Exercice 6. *Le niveau sonore se mesure en décibels (abrégé db). Par exemple, le bruit d'un scooter est 90 db, et celui du décollage d'une fusée est 180 db. On admet que lorsque l'on double une source sonore, le niveau sonore est augmenté de 0,3 db. Par exemple, le bruit de deux scooters est 90,3 db, et celui de deux fusées est 180,3 db.*
On se pose la question suivante.

> *Combien de scooters sont nécessaires pour faire autant de bruit qu'une fusée ?*

Pour y répondre, on imagine l'expérience suivante. On commence avec un scooter, et on mesure le niveau sonore. Puis à chaque étape, on double le nombre de scooters, et on mesure le nouveau niveau sonore.
On définie u et v les suites définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

- *u_n est le nombre de scooters à l'étape n ;*
- *v_n est le niveau sonore des scooters à l'étape n ;*
- *u_1 et v_1 représentent le nombre initial de scooters (un seul) et son niveau sonore.*

1. *Justifier que u est une suite géométrique de premier terme $u_1 = 1$ et de raison 2, et que v est une suite arithmétique de premier terme $v_1 = 90$ et de raison $0,3$.*

   Puisque le nombre de scooters est doublé à chaque étape, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_{n+1} = 2u_n$, donc la suite est géométrique de raison 2. Son premier terme est $u_1 = 1$ (car on commence l'expérience avec un seul scooter).

   De même, à chaque étape, le nombre de scooters double, donc la source sonore double, donc le niveau sonore augmente de 0,3 db : $v_{n+1} = v_n + 0,3$. La suite v est donc arithmétique de raison 0,3, et de premier terme $v_1 = 90$ (car au départ, il y a un seul scooter produisant un bruit de 90 db).

2. *Donner la formule explicite des suites u et v.*

   Puisque u est géométrique, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ (où q est la raison), donc $u_n = 1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}$.

   Puisque v est arithmétique, alors $v_n = v_1 + (n-1)p$ (où p est la raison) donc $v_n = 90 + 0,3(n-1)$.

3. *Résoudre $v_n \geqslant 180$, et en déduire combien d'étapes seront nécessaires pour que le niveau sonore des scooters atteigne celui d'une fusée.*

   Résolvons l'inéquation.

$$\begin{aligned} v_n &\geqslant 180 \\ 90 + 0,3(n-1) &\geqslant 180 \\ 0,3(n-1) &\geqslant 90 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} n-1 &\geqslant \tfrac{90}{0,3} \\ n-1 &\geqslant 300 \\ n &\geqslant 301 \end{aligned}$$

   Donc au bout de 301 étapes, le niveau sonore des scooters sera égal à celui d'une fusée.

4. *En déduire combien de scooters sont nécessaires pour obtenir le niveau sonore d'une fusée. Arrondir le résultat avec une précision qui vous semble correcte.*

   Le nombre de scooters nécessaires est alors donné par le terme u_{301}, soit $u_{301} = 2^{301-1} = 2^{300} \approx 2 \times 10^{90}$.

   C'est un nombre énorme :

   — Pour fabriquer ce nombre de scooters, il aurait fallu, depuis le big bang, fabriquer chaque seconde 10^{72} scooters : un milliard de milliards de milliards de milliards de milliards de milliards de milliards de milliards de scooters chaque seconde.

   — En remplaçant chaque atome de l'univers par *dix milliards* de scooters, on abtiendrait ce nombre.