Exercice 1 (Orthocentre). Dans cet exercice, nous allons prouver que les trois hauteurs d'un triangle sont *concourrantes*, c'est-à-dire qu'elles passent toutes les trois par le même point. Pour cela, nous allons d'abord définir H comme le point d'intersection de deux des hauteurs, puis nous allons montrer que la troisième hauteur passe aussi par H.

1. Soient A, B, C trois points du plan. Montrer que pour tout point M, on a :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = 0$$

Indice : Utiliser les décompositions $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}$.

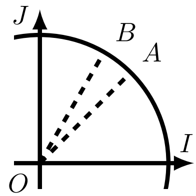
Soit ABC un triangle, et H le point d'intersection des hauteurs issues de A et B. En appliquant l'égalité précédente au point H, on obtient :

$$\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB} = 0$$

2. Justifier que $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} = 0$ et $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA} = 0$.
3. Simplifier l'expression $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB} = 0$, puis en déduire que (AB) et (HC) sont perpendiculaires.
4. En déduire que les trois hauteurs d'un triangle sont concourrantes.

Exercice 2 (Valeurs remarquables).
Le but de l'exercice est de calculer la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{12}$.

On considère le cercle trigonométrique, et on se place dans le repère orthonormé (O, I, J). On considère les points A et B, tels que $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}\right) = \frac{\pi}{4}$ et $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{3}$.



1. (a) Rappeler les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{4}$, $\sin \frac{\pi}{4}$, $\cos \frac{\pi}{3}$, et $\sin \frac{\pi}{3}$.
   (b) Déterminer les coordonnées de A et B, puis des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.
   (c) En utilisant l'expression algébrique du produit scalaire (celle qui utilise les coordonnées des vecteurs), montrer que $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}$.
2. (a) Justifier que $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{12}$.
   (b) Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ en fonction de $\cos \frac{\pi}{12}$.
3. En déduire la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{12}$.

Exercice 3 (Culture). Au choix :

— racontez une blague mathématique (au sens large : histoire drôle, jeu de mot, dessin d'humour…). Attention : pas de blague discriminante (sexiste, raciste, homophobe, etc.) ;

— citez une œuvre d'art mathématique (littérature, théâtre, musique, peinture, sculpture, etc.).