

**Exercice 1** (Orthocentre). *Dans cet exercice, nous allons prouver que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes, c'est-à-dire qu'elles passent toutes les trois par le même point. Pour cela, nous allons d'abord définir  $H$  comme le point d'intersection de deux des hauteurs, puis nous allons montrer que la troisième hauteur passe aussi par  $H$ .*

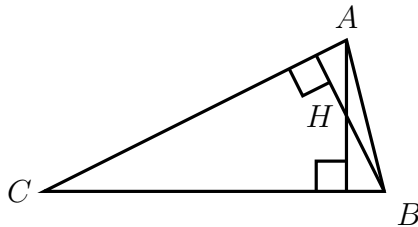
1. Soient  $A, B, C$  trois points du plan. Montrer que pour tout point  $M$ , on a :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

On utilise les décompositions :  $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}$ .

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{CA} + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{MA} \cdot \vec{0} + \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC}) \\ &= 0 + \overrightarrow{AB} \cdot \vec{0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Soit  $ABC$  un triangle, et  $H$  le point d'intersection des hauteurs issues de  $A$  et  $B$ .



En appliquant l'égalité précédente au point  $H$ , on obtient :

$$\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

2. Justifier que  $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$  et  $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$ .

Puisque  $H$  est à l'intersection des hauteurs issues de  $A$  et  $B$ , alors, par définition des hauteurs, les droites  $(AH)$  et  $(BC)$  d'une part, et

( $BH$ ) et ( $AC$ ) d'autre part, sont perpendiculaires. Donc les produits scalaires  $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC}$  et  $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA}$  sont nuls.

3. Simplifier l'expression  $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ , puis en déduire que ( $AB$ ) et ( $HC$ ) sont perpendiculaires. On applique simplement l'égalité, en remarquant que les deux produits scalaires mentionnés à la question précédente sont nuls.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} &= 0 \\ \iff 0 + 0 + \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} &= 0 \\ \iff \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} &= 0 \end{aligned}$$

4. En déduire que les trois hauteurs d'un triangle sont concourrantes.

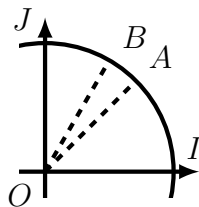
Nous venons de démontrer que  $\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ . Donc les deux droites ( $HC$ ) et ( $AB$ ) sont perpendiculaires, et ( $HC$ ) est donc la hauteur du triangle issue de  $C$ .

Nous avons donc montré que la troisième hauteur passe par le point d'intersection des deux premières : les trois hauteurs sont donc concourrantes.

### Exercice 2 (Valeurs remarquables).

Le but de l'exercice est de calculer la valeur exacte de  $\cos \frac{\pi}{12}$ .

On considère le cercle trigonométrique, et on se place dans le repère orthonormé  $(O, I, J)$ . On considère les points  $A$  et  $B$ , tels que  $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{4}$  et  $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{3}$ .



1. (a) Rappeler les valeurs exactes de  $\cos \frac{\pi}{4}$ ,  $\sin \frac{\pi}{4}$ ,  $\cos \frac{\pi}{3}$ , et  $\sin \frac{\pi}{3}$ .

On connaît :  $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  ;  $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  ;  $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$  ;  $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

- (b) Déterminer les coordonnées de  $A$  et  $B$ , puis des vecteurs  $\overrightarrow{OA}$  et  $\overrightarrow{OB}$ . On rappelle que  $O(0; 0)$ , et que les coordonnées de tout point du cercle trigonométrique sont le cosinus et le sinus de

l'angle qui lui est associé. Donc  $A \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$  et  $B \left( \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2} \right)$ .

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \begin{pmatrix} x_A - x_O \\ y_A - y_O \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{OB} \begin{pmatrix} x_B - x_O \\ y_B - y_O \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

- (c) *En utilisant l'expression algébrique du produit scalaire (celle qui utilise les coordonnées des vecteurs), montrer que  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$ .*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= x_{\overrightarrow{OA}} \times x_{\overrightarrow{OB}} + y_{\overrightarrow{OA}} \times y_{\overrightarrow{OB}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2} \times \sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})}{4}\end{aligned}$$

2. (a) *Justifier que  $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{12}$ .*

L'angle  $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$  est la différence entre les angles  $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OB})$  et

$$(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OA}) :$$

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) &= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{4\pi}{12} - \frac{3\pi}{12} \\ &= \frac{4\pi - 3\pi}{12} \\ &= \frac{\pi}{12}\end{aligned}$$

(b) *Exprimer le produit scalaire  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$  en fonction de  $\cos \frac{\pi}{12}$ .*

Commençons par remarquer que puisque  $[OA]$  et  $[OB]$  sont des rayons du cercle trigonométrique, alors  $OA = OB = 1$ .

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= OA \times OB \times \cos(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) \\ &= 1 \times 1 \times \cos \frac{\pi}{12} \\ &= \cos \frac{\pi}{12}\end{aligned}$$

3. *En déduire la valeur exacte de  $\cos \frac{\pi}{12}$ .*

Nous avons montré, d'une part, que  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$ , et, d'autre part, que  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \cos \frac{\pi}{12}$ . Donc ces deux valeurs sont égales, donc :

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$$