Exercice 1 (Orthocentre). *Dans cet exercice, nous allons prouver que les trois hauteurs d'un triangle sont* concourrantes*, c'est-à-dire qu'elles passent toutes les trois par le même point. Pour cela, nous allons d'abord définir H comme le point d'intersection de deux des hauteurs, puis nous allons montrer que la troisième hauteur passe aussi par H.*

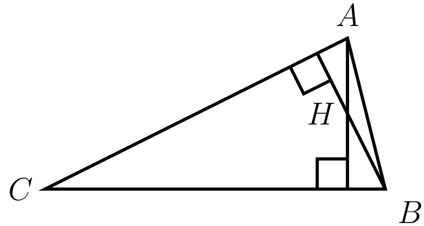
1. *Soient A, B, C trois points du plan. Montrer que pour tout point M, on a :*

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB}=0$$

On utilise les décompositions : $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}$.

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB}\\
&=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}+(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}).\overrightarrow{CA}+(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AB}\\
&=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}\\
&=\overrightarrow{MA}.\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right)+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\\
&=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{0}+\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC}\right)\\
&=0+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{0}\\
&=0
\end{aligned}$$

Soit ABC un triangle, et H le point d'intersection des hauteurs issues de A et B.



En appliquant l'égalité précédente au point H, on obtient :

$$\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB}=0$$

2. *Justifier que $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC}=0$ et $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA}=0$.*

Puisque H est à l'intersection des hauteurs issues de A et B, alors, par définition des hauteurs, les droites (AH) et (BC) d'une part, et

(BH) et (AC) d'autre part, sont perpendiculaires. Donc les produits scalaires $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA}$ sont nuls.

3. *Simplifier l'expression* $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB} = 0$*, puis en déduire que* (AB) *et* (HC) *sont perpendiculaires.* On applique simplement l'égalité, en remarquant que les deux produits scalaires mentionnés à la question précédente sont nuls.

$$\begin{array}{rcccccrcl} & \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} & + & \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA} & + & \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB} & = & 0 \\ \iff & 0 & + & 0 & + & \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB} & = & 0 \\ \iff & & & & & \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB} & = & 0 \end{array}$$

4. *En déduire que les trois hauteurs d'un triangle sont concourrantes.*

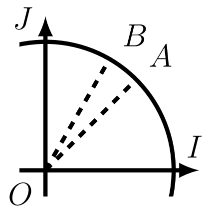
   Nous venons de démontrer que $\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB} = 0$. Donc les deux droites (HC) et (AB) sont perpendiculaires, et (HC) est donc la hauteur du triangle issue de C.

   Nous avons donc montré que la troisième hauteur passe par le point d'intersection des deux premières : les trois hauteurs sont donc concourrantes.

Exercice 2 (Valeurs remarquables)**.**

Le but de l'exercice est de calculer la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$.

On considère le cercle trigonométrique, et on se place dans le repère orthonormé (O, I, J). *On considère les points* A *et* B*, tels que* $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}\right) = \frac{\pi}{4}$ *et* $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{3}$.



1. (a) *Rappeler les valeurs exactes de* $\cos\frac{\pi}{4}$, $\sin\frac{\pi}{4}$, $\cos\frac{\pi}{3}$, *et* $\sin\frac{\pi}{3}$.

   On connait : $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$; $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

   (b) *Déterminer les coordonnées de* A *et* B*, puis des vecteurs* $\overrightarrow{OA}$ *et* $\overrightarrow{OB}$. On rappelle que $O(0;0)$, et que les coordonnées de tout point du cercle trigonométrique sont le cosinus et le sinus de l'angle qui lui est associé. Donc $A\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}x_A-x_O\\y_A-y_O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}-0\\\frac{\sqrt{2}}{2}-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}x_B-x_O\\y_B-y_O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-0\\\frac{\sqrt{3}}{2}-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

(c) *En utilisant l'expression algébrique du produit scalaire (celle qui utilise les coordonnées des vecteurs), montrer que* $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}&=x_{\overrightarrow{OA}}\times x_{\overrightarrow{OB}}+y_{\overrightarrow{OA}}\times y_{\overrightarrow{OB}}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\\&=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{4}\\&=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{4}\\&=\frac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}{4}\end{aligned}$$

2. (a) *Justifier que* $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)=\frac{\pi}{12}$.

L'angle $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)$ est la différence entre les angles $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}\right)$ et

$\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}\right)$:

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right) &= \frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\\ &= \frac{4\pi}{12}-\frac{3\pi}{12}\\ &= \frac{4\pi-3\pi}{12}\\ &= \frac{\pi}{12}\end{aligned}$$

(b) *Exprimer le produit scalaire* $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ *en fonction de* $\cos\frac{\pi}{12}$.
Commençons par remarquer que puisque $[OA]$ et $[OB]$ sont des rayons du cercle trigonométrique, alors $OA = OB = 1$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} &= OA\times OB\times\cos\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)\\ &= 1\times 1\times\cos\frac{\pi}{12}\\ &= \cos\frac{\pi}{12}\end{aligned}$$

3. *En déduire la valeur exacte de* $\cos\frac{\pi}{12}$.

Nous avons montré, d'une part, que $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \frac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}{4}$, et, d'autre part, que $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \cos\frac{\pi}{12}$. Donc ces deux valeurs sont égales, donc :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}{4}$$