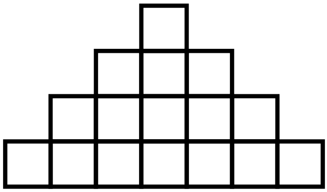
Exercice 2 (Problème ouvert). *Une petite fille empile ses cubes comme indiqué sur la figure ci-dessous (chaque étage contient deux cubes de plus que l'étage du dessus).*



Combien d'étage aura la plus grande pyramide qu'elle pourra construire avec 1729 cubes ? Combien de cubes seront alors utilisés ?

Méthode 1. Avec les suites. On appelle u la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : u_n *est le nombre de cubes de l'étage* n *(en partant du haut)* : le premier étage a un cube, donc $u_1 = 1$, le second étage a trois cubes, donc $u_2 = 3$, et ainsi de suite.

C'est une suite arithmétique de premier terme[1] $u_1 = 1$ et de raison 2. Donc pour n'importe quel nombre n, on a $u_n = 1 + 2(n-1) = 1 + 2n - 2 = 2n - 1$.

Une pyramide de n étage contiendra donc $u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ cubes. Puisque la petite fille dispose de 1729 cubes, alors on a :

$$\begin{aligned}
u_1 + u_2 + \cdots + u_n &\leqslant 1729 \\
n \times \frac{u_1 + u_n}{2} &\leqslant 1729 \\
n \times \frac{1 + 2n - 1}{2} &\leqslant 1729 \\
n \times \frac{2n}{2} &\leqslant 1729 \\
n^2 &\leqslant 1729 \\
n &\leqslant \sqrt{1729} \text{ car } n \text{ est un nombre positif.}
\end{aligned}$$

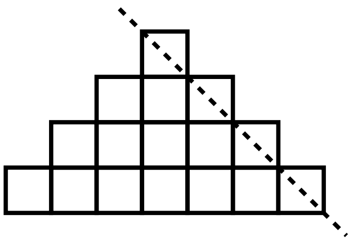
1. Remarque : On aurait tout aussi bien pu prendre comme premier terme u_0 (et non pas u_1), mais cela aurait induit un décalage entre le numéro de l'étage et l'indice du terme de la suite (le nombre de termes du 7e étage aurait alors été u_6 et non pas u_7, par exemple).

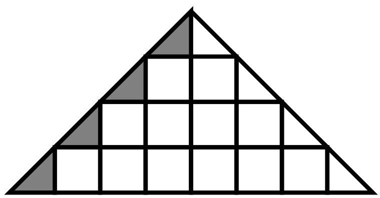
Donc, puisque $\sqrt{1729} \approx 41,6$, la plus grande valeur que peut prendre n est 41.
La pyramide aura donc 41 étages.
Le nombre de cubes utilisés sera alors $41 \times \frac{u_1+u_{41}}{2} = 41 \times \frac{1+2\times 41-1}{2} = 1681$.
Méthode 2. Avec le tableur. On construit la feuille de calcul suivante. La première colonne est le numéro de l'étage, la colonne A est le nombre de cubes de cet étage, et la colonne B le nombre de cube de la pyramide qui a ce nombre d'étage.
Pour remplir ce tableur, les cellules $A1$ et $B1$ contiennent les nombres 1, et on écrit dans la cellule $A2$: `=A1+2`, et dans la cellule $B2$: `=B1+A2`. On fait ensuite glisser les formules pour les recopier vers le bas.

Par exemple, la ligne 3 signifie : « Le 3e étage est constitué de 5 cubes, et il faut 9 cubes pour fabriquer une pyramide à 3 étages ». On observe que la ligne 42 est la première à dépasser le nombre 1729. La plus grande pyramide possible a donc 41 étages.

	A	B
1	1	1
2	3	4
3	5	9
...		
41	81	1681
42	83	1764
43	85	1849

Méthode 3. Avec la géométrie. *Cette méthode manque de rigueur, mais la démarche est intéressante.*





Sur chacun des étages, on découpe le demi-cube de droite (figure de gauche), puis on le « recolle » à la gauche du même étage (figure de droite). On obtient donc un triangle, dont l'aire est le nombre de cubes de la pyramide.

La base de ce triangle est le nombre de cubes du dernier étages, plus un, soit (en utilisant la suite de la méthode 1), $2n - 1 + 1 = 2n$.
La hauteur de ce triangle est le nombre d'étages, soit n.
Donc l'aire du triangle, qui correspond au nombre de cubes, est donc $\frac{2n\times n}{2} = n^2$.
Puisque la petite fille dispose de 1729 cubes, on cherche le plus grand n tel que $n^2 \leqslant 1729$, c'est-à-dire (puisque n est positif), le plus grand n tel que $n \leqslant \sqrt{1729}$. Puisque $\sqrt{1729} \approx 41,6$, alors $n = 41$.
La plus grande pyramide possible a 41 étages.
Méthode 4. Avec les carrés.*Le raisonnement ici est le même que celui de la méthode 1, mais avec peu de rigueur.* On calcule, à la main, le nombre de cubes nécessaire pour faire une pyramide de quelques étages. On obtient : pour 1 étage, 1 cube ; pour 2 étage, 4 cubes ; pour 3 étage, 9 cubes ; pour 4 étage, 16 cubes ; etc. On remarque [2] que pour n étages, il faut n^2 cubes.
Puisque l'on dispose de 1729 cubes, on cherche le plus grand n tel que $n^2 \leqslant 1729$, c'est-à-dire (puisque n est positif), le plus grand n tel que $n \leqslant \sqrt{1729}$. Enfin, puisque $\sqrt{1729} \approx 41,6$, cela donne $n = 41$.
La plus grande pyramide possible possède 41 étages.
Méthode 5. Avec un algorithme. On met en œuvre l'algorithme suivant, sur calculatrice ou sur ordinateur, où la variable *etage* représente le numéro de l'étage, *ligne* le nombre de cube à cet étage, et *total* le nombre total de cubes de la pyramide jusqu'à présent.

```
etage = 1
ligne = 1
total = 1
while total < 1729:
    etage = etage + 1
    ligne = ligne + 2
    total = total + ligne
print(etage, ligne, total)
```

2. Pour être rigoureux, il faudrait prouver cette relation. C'est l'objet de la méthode 1.

Ce programme « ajoute » des lignes à la pyramide jusqu'à ce qu'elle dépasse 1729 ; il affiche comme résultat `42, 83, 1764`, ce qui signifie que le premier étage qui utilise plus de 1729 cubes est le 42e, composé de 83 cubes. Il faut donc le retirer, et cela signifie que la pyramide aura $42 - 1 = 41$ étages composés de $1764 - 83 = 1681$ cubes.

Exercice 3. *Une personne dépose 100€ dans une banque, dans laquelle on lui propose les deux comptes suivants :*

- *(A) l'argent placé rapporte 5% d'intérêts simples par an (c'est-à-dire que seul l'argent placé au départ rapporte des intérêts) ;*
- *(B) l'argent placé rapporte 3% d'intérêts composés par an (c'est-à-dire que les intérêts d'une année rapportent eux même des intérêts l'année suivante).*

1. *Donner, dans les deux cas, la somme d'argent présente sur le compte les trois premières années.*

   Avec le compte A, l'argent placé rapporte chaque année 5% de la somme initiale, soit 5€. Il y aura donc la première année 100€ (la somme initiale), 105€ la seconde année, 110€ la troisième année.

   Avec le compte B, l'argent rapporte chaque année 3% de la somme. Il y aura donc 100€ la première année, $100 + \frac{3}{100} \times 100 = 103$ la seconde année, et $103 + \frac{3}{100} \times 103 = 106,09$ la troisième année.

2. *Étude du compte A. On appelle a la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : a_n est la somme d'argent présente sur le compte au bout de n années (a_0 étant la somme initiale).*

   (a) *Donner les valeurs de a_0, a_1, a_2.* D'après les calculs de la première question, on a : $a_0 = 100$, $a_1 = 105$, $a_2 = 110$.

   (b) *Montrer que a est une suite arithmétique de premier terme 100 et de raison 5.* Comme expliqué précédement, l'argent placé rapporte 5€ par an. Donc la somme sur le compte augmente de 5€ par an, ce qui correspond à une suite arithmétique de premier terme $a_0 = 100$ et de raison 5.

   (c) *Donner le terme général de la suite a.* Puisque a est arithmétique, alors $a_n = 100 + 5n$.

(d) *Combien d'argent sera présent sur le compte au bout de 20 ans ?* Au bout de 20 ans, il y aura sur le compte $a_{20} = 100 + 5 \times 20 = 200$ euros.

3. *Étude du compte B. On appelle b la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : b_n est la somme d'argent présente sur le compte au bout de n années (b_0 étant la somme initiale).*

   (a) *Donner les valeurs de b_0, b_1, b_2.* D'après les calculs de la première question, on a : $b_0 = 100$, $b_1 = 103$, $b_2 = 106,09$.

   (b) *Montrer que b est une suite géométrique de premier terme 100 et de raison $1,03$.*

   Chaque année, l'argent placé rapporte 3% d'intérêts. Soit b_n l'argent présent sur le compte l'année n. Alors l'année suivante, il y aura donc :

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= b_n + 3\% \times b_n \\ &= b_n (1 + 3\%) \\ &= b_n \left(1 + \frac{3}{100}\right) \\ &= 1,03 b_n \end{aligned}$$

   La suite b est donc géométrique de premier terme $b_0 = 100$ et de raison $1,03$.

   (c) *Donner le terme général de la suite b.* La suite étant géométrique, alors $b_n = 100 \times 1,03^n$.

   (d) *Combien d'argent sera présent sur le compte au bout de 20 ans ?* Il y aura au bout de vingt ans $b_{20} = 100 \times 1,03^{20} \approx 180,61$ euros.

4. *À l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de combien d'années le compte B sera plus intéressant que le compte A.* On observe les données suivantes (arrondies au centime).

Rang	a	b
32	260	257,51
33	265	265,23

Donc à partir de la 33e année, il y a plus d'argent avec le compte B qu'avec le compte A.