

Faire l'un des deux menus suivants :

**Menu 1 (moins difficile) :** Exercices 1, 2, 3.

**Menu 2 (plus difficile) :** Exercices 1, 2, 4.

**Exercice 1** (Culture générale). Citer un mathématicien ou une mathématicienne, et dire en deux ou trois phrases pourquoi cette personne est connue.

**Exercice 2.** Dans cet exercice, on souhaite prouver que la fonction carré est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}^-$  et strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$ .

1. Lire et comprendre le raisonnement suivant, qui prouve que la fonction carré est strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$ . Il n'y a rien à écrire sur votre copie pour cette question.

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres positifs, tels que  $a < b$ . Alors :

$$\begin{aligned}a &< b \\ a - b &< 0\end{aligned}$$

Or, puisque  $a$  et  $b$  sont tous deux positifs, alors  $a + b$  est positif, donc on peut multiplier à gauche et à droite sans changer le sens de l'inégalité. Donc :

$$\begin{aligned}(a + b)(a - b) &< 0 \times (a + b) \\ a^2 - b^2 &< 0 \\ a^2 &< b^2\end{aligned}$$

Donc quels que soient les nombres positifs  $a$  et  $b$ , si  $a < b$ , alors  $a^2 < b^2$  : donc la fonction carré est strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$ .

2. En utilisant un raisonnement *très* similaire, prouver que la fonction carré est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}^-$ .

**Exercice 3.** On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f : x \mapsto |x + 1| - |2x - 2|$ .

L'objet de l'exercice est de tracer la courbe représentative de cette fonction, ainsi que son tableau de variations.

0. Préparer un repère orthogonal, allant de  $-2$  à  $5$  en abscisses, et de  $-5$  à  $2$  en ordonnée.
1. Dresser le tableau de signes des fonctions affines  $x \mapsto x + 1$  et  $x \mapsto 2x - 2$ .
2. *Premier cas* :  $x \leq -1$ 
  - (a) Montrer que si  $x \leq -1$ , alors  $|x + 1| = -x - 1$  et  $|2x - 2| = -2x + 2$ .
  - (b) En déduire que pour  $x \leq -1$ ,  $f(x) = x - 3$ .
  - (c) Quelles sont les variations de  $f$  pour  $x \leq -1$  ?
  - (d) Tracer la courbe de  $f$  sur le repère, pour  $x \leq -1$ .
3. *Deuxième cas* :  $x \in [-1; 1]$ 
  - (a) En utilisant la même méthode qu'à la question précédente, montrer que pour  $x \in [-1; 1]$ , on a  $f(x) = 3x - 1$ .
  - (b) En déduire les variations de  $f$  sur  $[-1; 1]$ , et tracer sa courbe sur ce même intervalle.
4. *Troisième cas* :  $x \geq 1$ . En utilisant la même méthode, tracer la courbe de la fonction  $f$  pour  $x \geq 1$ , et déterminer ses variations sur ce même intervalle.
5. Conclure en dressant le tableau de variations de  $f$  sur  $]-\infty; +\infty[$ .

**Exercice 4.** Exercice 91 p. 66 du manuel.