Exercice 1. *Exprimer les expressions suivantes sous la forme ae^b, où a, et b sont des nombres réels.*

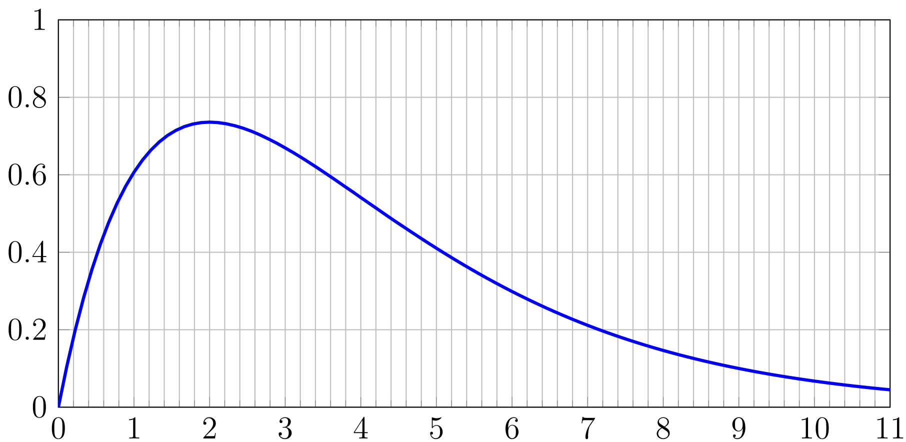
$$\begin{aligned} A = \left(e^5\right)^2 \times e^{-1} &= e^{5\times 2} \times e^{-1} \\ &= e^{10} \times e^{-1} \\ &= e^{10-1} \\ &= e^9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B = \frac{e^6}{e^4} + e^2 &= e^{6-4} + e^2 \\ &= e^2 + e^2 \\ &= 2e^2 \end{aligned}$$

Exercice 2 (D'après le sujet 29 d'E3C de mai 2020)**.** La concentration d'un médicament dans le sang en mg.L^{-1} au cours du temps t, exprimé en heure, est modélisée par la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(t) = te^{-0,5t}$$

dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.



1. *Calculer la valeur de $f(4)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.*

$$\begin{aligned} f(4) &= 4e^{-0,5\times 4} \\ &= 4e^{-2} \\ &\approx 0,54 \end{aligned}$$

Donc au bout de quatre heures, la concentration du médicament dans le sang sera environ 0,54 mg L^{-1}.

2. (a) *On note f' la fonction dérivée de f. Montrer que pour tout $t \in [0; +\infty[$,*

$$f'(t) = (1 - 0,5t)e^{-0,5t}$$

La fonction f est un produit de deux termes : t et $e^{-0,5t}$. On pose :

- $u(t) = t$
- $v(t) = e^{-0,5t}$

Alors :

- $u'(t) = 1$
- $v'(t) = -0,5e^{-0,5t}$

Et donc, puisque $(uv)' = u'v + v'u$, alors :

$$\begin{aligned} f'(t) &= 1 \times e^{-0,5t} + (-0,5)e^{-0,5t} \times t \\ &= e^{-0,5t} - 0,5te^{-0,5t} \\ &= (1 - 0,5t)e^{-0,5t} \end{aligned}$$

(b) *Étudier le signe de $f'(t)$ sur* $[0; +\infty[$. Puisqu'une exponentielle est toujours positive, alors $f'(t)$ est du signe de $1 - 0,5t$, qui est une fonction affine décroissante, qui s'annule en $-\frac{1}{-0,5} = 2$.

Le tableau de signes est tracé à la question suivante.

(c) *Déduire de la question précédente le tableau de variations de la fonction f sur* $[0; +\infty[$.

t	0		2		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow$	

Pour obtenir les extremums, on a calculé $f(2) = 2e^{-0,5\times 2} = 2e^{-1} = \frac{2}{e}$ et $f(0) = 0 \times e^{-0,5\times 0} = 0$.

(d) *Quelle est la concentration maximale du médicament dans le sang ? On donnera la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près.*

D'après le tableau de variations, le maximum de f est $\frac{2}{e}$. Donc la concentration maximale du médicament sera donc $\frac{2}{e} \approx 0,74\,\mathrm{mg\,L^{-1}}$.