

Faire un des deux exercices 2 ou 3 au choix (l'exercice 3 est plus difficile).
L'exercice 1 est obligatoire.

Exercice 1 (Culture générale). Citez un problème ouvert en mathématiques (c'est-à-dire un problème que personne au monde ne sait résoudre).

Exercice 2 (Lieu géométrique). Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère :

- le cercle \mathcal{C} de centre $A(13; 9)$ et de rayon 6 ;
- la droite \mathcal{D} d'équation $y = 2x - 5$.

On cherche à déterminer les coordonnées des intersections de \mathcal{C} et \mathcal{D} .

1. Soit $M(x; y)$ un point de \mathcal{C} . Déterminer la longueur AM , puis justifier que $(x - 13)^2 + (y - 9)^2 = 36$.

On considère un point $M(x; y)$ du plan. On admet que ce point est sur le cercle \mathcal{C} si et seulement si l'équation $(x - 13)^2 + (y - 9)^2 = 36$ est vérifiée.

2. Montrer que M est à la fois sur \mathcal{C} et \mathcal{D} si et seulement si :

$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ (x - 13)^2 + (2x - 14)^2 = 36 \end{cases}$$

3. En déduire que M est à la fois sur \mathcal{C} et \mathcal{D} si et seulement si :

$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ 5x^2 - 82x + 329 = 0 \end{cases}$$

4. Résoudre la seconde équation, et en déduire les coordonnées des points d'intersection de \mathcal{C} et \mathcal{D} .

Exercice 3 (Lieu géométrique). Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère :

- le nombre réel α ;
- le cercle \mathcal{C} de centre $A(13; 9)$ et de rayon 6 ;
- la droite \mathcal{D} d'équation $y = \alpha x - 4\alpha + 3$.

La droite n'est donc pas « fixe » : elle dépend d'un paramètre α . On cherche à déterminer le nombre de points d'intersections de \mathcal{C} et \mathcal{D} en fonction de ce paramètre α .

1. Soit $M(x; y)$ un point de \mathcal{C} . Déterminer la longueur AM , puis justifier que $(x - 13)^2 + (y - 9)^2 = 36$.

On considère un point $M(x; y)$ du plan. On admet que ce point est sur le cercle \mathcal{C} si et seulement si l'équation $(x - 13)^2 + (y - 9)^2 = 36$ est vérifiée.

2. Montrer que M est à la fois sur \mathcal{C} et \mathcal{D} si et seulement si :

$$\begin{cases} y = \alpha x - 4\alpha + 3 \\ (x - 13)^2 + (\alpha x - 4\alpha - 6)^2 = 36 \end{cases}$$

3. En déduire que M est à la fois sur \mathcal{C} et \mathcal{D} si et seulement si :

$$\begin{cases} y = \alpha x - 4\alpha + 3 \\ (\alpha^2 + 1)x^2 - (8\alpha^2 + 12\alpha + 26)x + 16\alpha^2 + 48\alpha + 169 = 0 \end{cases}$$

Puisque les solutions de la seconde équation correspondent aux valeurs possible de x (abscisse des points d'intersection de \mathcal{C} et \mathcal{D}), et que pour chaque abscisse il n'y a qu'une ordonnée correspondante (d'après la première équation), alors le nombre de solutions de la seconde équation correspond au nombre de points d'intersection entre \mathcal{C} et \mathcal{D} .

On calcule le discriminant de l'expression précédente, soit :

$$\Delta = (8\alpha^2 + 12\alpha + 26)^2 - 4 \times (\alpha^2 + 1) (16\alpha^2 + 48\alpha + 169)$$

Pour éviter les erreurs de calculs, on fait développer cette expression par le logiciel de calcul formel Xcas¹.

$\text{developper}((8\alpha^2 + 12\alpha + 26)^2 - 4 * (\alpha^2 + 1) * (16\alpha^2 + 48\alpha + 169))$
$-180 * \alpha^2 + 432 * \alpha$

4. Dresser, en fonction de α , le tableau de signes de l'expression $-180\alpha^2 + 432\alpha$.
5. En déduire, en fonction de α , le nombre de solutions du système de la question 3, puis le nombre de points d'intersection entre \mathcal{C} et \mathcal{D} .

1. C'est un logiciel libre et gratuit, que vous pouvez télécharger et installer gratuitement et légalement sur GNU/Linux, Windows et MacOS : <https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac.html>.