

**Exercice 2** (Lieu géométrique). Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère :

- le cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $A(13; 9)$  et de rayon 6 ;
- la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = 2x - 5$ .

On cherche à déterminer les coordonnées des intersections de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$ .

1. Soit  $M(x; y)$  un point de  $\mathcal{C}$ . Déterminer la longueur  $AM$ , puis justifier que  $(x - 13)^2 + (y - 9)^2 = 36$ .

Puisque  $M$  est un point du cercle de centre  $A$ , alors  $[AM]$  est un rayon, donc  $AM = 6$ .

$$\begin{aligned} AM &= 6 \\ \iff \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} &= 6 \\ \iff \sqrt{(x - 13)^2 + (y - 9)^2} &= 6 \\ \iff (x - 13)^2 + (y - 9)^2 &= 6^2 \\ \iff (x - 13)^2 + (y - 9)^2 &= 36 \end{aligned}$$

On considère un point  $M(x; y)$  du plan. On admet que ce point est sur le cercle  $\mathcal{C}$  si et seulement si l'équation  $(x - 13)^2 + (y - 9)^2 = 36$  est vérifiée.

2. Montrer que  $M$  est à la fois sur  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  si et seulement si :

$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ (x - 13)^2 + (2x - 14)^2 = 36 \end{cases}$$

Le point  $M$  est à la fois sur la droite et le cercle si les deux équations sont vérifiées, c'est-à-dire si  $y = 2x - 5$  et  $(x - 13)^2 + (y - 9)^2 = 36$ . Puisque l'équation de la droite est respectée, nous pouvons rempla-

cer le  $y$  de l'équation du cercle par  $2x - 5$ , donc :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} y = 2x - 5 \\ (x - 13)^2 + (y - 9)^2 = 36 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} y = 2x - 5 \\ (x - 13)^2 + (2x - 5 - 9)^2 = 36 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} y = 2x - 5 \\ (x - 13)^2 + (2x - 14)^2 = 36 \end{cases} \end{aligned}$$

3. En déduire que  $M$  est à la fois sur  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  si et seulement si :

$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ 5x^2 - 82x + 329 = 0 \end{cases}$$

Dans le système d'équation précédent, développons la seconde équation.

$$\begin{aligned} & (x - 13)^2 + (2x - 14)^2 = 36 \\ \iff & x^2 - 2 \times x \times 13 + 13^2 + (2x)^2 - 2 \times 2x \times 14 + 14^2 = 36 \\ \iff & x^2 - 26x + 169 + 4x^2 - 56x + 196 - 36 = 0 \\ \iff & 5x^2 - 82x + 329 = 0 \end{aligned}$$

Donc le point  $M$  est sur  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  si et seulement si :

$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ 5x^2 - 82x + 329 = 0 \end{cases}$$

4. Résoudre la seconde équation, et en déduire les coordonnées des points d'intersection de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$ .

Résolvons cette seconde équation : c'est un trinôme du second degré avec  $a = 5$ ,  $b = -82$ ,  $c = 329$ . Son discriminant est  $\Delta = b^2 - 4ac = (-82)^2 - 4 \times 5 \times 329 = 144$ . Le discriminant est strictement positif, donc il y a deux solutions :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-82) - \sqrt{144}}{2 \times 5} = 7 \\ x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-82) + \sqrt{144}}{2 \times 5} = 9,4 \end{aligned}$$

Nous avons deux valeurs possibles pour  $x$ . Utilisons l'équation de la droite pour trouver les valeurs correspondantes pour  $y$ .

(a) Si  $x = 7$ , alors  $y = 2 \times 7 - 5 = 9$ .

(b) Si  $x = 9,4$ , alors  $y = 2 \times 9,4 - 5 = 13,8$ .

Le cercle et la droite ont donc deux points d'intersection, de coordonnées  $\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 9,4 \\ 13,8 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 3** (Droite et Cercle). *Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère :*

- le nombre réel  $\alpha$  ;
- le cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $A(13; 9)$  et de rayon 6 ;
- la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = \alpha x - 4\alpha + 3$ .

*La droite n'est donc pas « fixe » : elle dépend d'un paramètre  $\alpha$ . On cherche à déterminer le nombre de points d'intersections de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  en fonction de ce paramètre  $\alpha$ .*

1. *Soit  $M(x; y)$  un point de  $\mathcal{C}$ . Déterminer la longueur  $AM$ , puis justifier que  $(x - 13)^2 + (y - 9)^2 = 36$ .*

Voir la correction de la question 1 de l'exercice 2.

*On considère un point  $M(x; y)$  du plan. On admet que ce point est sur le cercle  $\mathcal{C}$  si et seulement si l'équation  $(x - 13)^2 + (y - 9)^2 = 36$  est vérifiée.*

2. *Montrer que  $M$  est à la fois sur  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  si et seulement si :*

$$\begin{cases} y = \alpha x - 4\alpha + 3 \\ (x - 13)^2 + (\alpha x - 4\alpha - 6)^2 = 36 \end{cases}$$

Le point  $M$  est à la fois sur la droite et le cercle si les deux équations sont vérifiées, c'est-à-dire si  $y = \alpha x - 4\alpha + 3$  et  $(x - 13)^2 + (y - 9)^2 = 36$ . Puisque l'équation de la droite est respectée, nous pouvons

remplacer le  $y$  de l'équation du cercle par  $\alpha x - 4\alpha + 3$ , donc :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} y = \alpha x - 4\alpha + 3 \\ (x - 13)^2 + (y - 9)^2 = 36 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} y = \alpha x - 4\alpha + 3 \\ (x - 13)^2 + (\alpha x - 4\alpha + 3 - 9)^2 = 36 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} y = \alpha x - 4\alpha + 3 \\ (x - 13)^2 + (\alpha x - 4\alpha - 6)^2 = 36 \end{cases} \end{aligned}$$

3. En déduire que  $M$  est à la fois sur  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  si et seulement si :

$$\begin{cases} y = \alpha x - 4\alpha + 3 \\ (\alpha^2 + 1)x^2 - (8\alpha^2 + 12\alpha + 26)x + 16\alpha^2 + 48\alpha + 169 = 0 \end{cases}$$

Développons la seconde équation du système précédent. Commençons par développer le second carré, avec la triple distributivité :

$$\begin{aligned} & (\alpha x - 4\alpha - 6)^2 \\ &= (\alpha x - 4\alpha - 6) \times (\alpha x - 4\alpha - 6) \\ &= \alpha^2 x^2 - 4\alpha^2 x - 6\alpha x - 4\alpha^2 x + 16\alpha^2 + 24\alpha - 6\alpha x + 24\alpha + 36 \\ &= \alpha^2 x^2 + (-4\alpha^2 - 6\alpha - 4\alpha^2 - 6\alpha) x + 16\alpha^2 + 24\alpha + 24\alpha + 36 \\ &= \alpha^2 x^2 + (-8\alpha^2 - 12\alpha) x + 16\alpha^2 + 48\alpha + 36 \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant développer la seconde équation du système de la question précédente.

$$\begin{aligned} & (x - 13)^2 + (\alpha x - 4\alpha - 6)^2 = 36 \\ & x^2 - 26x + 13^2 + \alpha^2 x^2 + (-8\alpha^2 - 12\alpha) x + 16\alpha^2 + 48\alpha + 36 = 36 \\ & (\alpha^2 + 1)x^2 + (-8\alpha^2 - 12\alpha - 26) x + 16\alpha^2 + 48\alpha + 36 + 169 - 36 = 0 \\ & (\alpha^2 + 1)x^2 - (8\alpha^2 + 12\alpha + 26) x + 16\alpha^2 + 48\alpha + 169 = 0 \end{aligned}$$

Puisque les solutions de la seconde équation correspondent aux valeurs possibles de  $x$  (abscisse des points d'intersection de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$ ), et que pour chaque

abscisse il n'y a qu'une ordonnée correspondante (d'après la première équation), alors le nombre de solutions de la seconde équation correspond au nombre de points d'intersection entre  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$ .

On calcule le discriminant de l'expression précédente, soit :

$$\Delta = (8\alpha^2 + 12\alpha + 26)^2 - 4 \times (\alpha^2 + 1)(16\alpha^2 + 48\alpha + 169)$$

Pour éviter les erreurs de calculs, on fait développer cette expression par le logiciel de calcul formel Xcas<sup>1</sup>.

developper((8 $\alpha^2$ + 12 $\alpha$ + 26) <sup>2</sup> - 4 * ( $\alpha^2$ + 1) * (16 $\alpha^2$ + 48 $\alpha$ + 169))
-180 * $\alpha^2$ + 432 * $\alpha$

4. Dresser, en fonction de  $\alpha$ , le tableau de signes de l'expression  $-180\alpha^2 + 432\alpha$ .

Cette expression est un trinôme du second degré, avec  $a = -180$ ,  $b = 432$ ,  $c = 0$ . Son discriminant est  $\Delta' = b^2 - 4ac = 432^2 - 4 \times (-180) \times 0 = 432^2$ . Le discriminant est positif, donc il y a deux racines :

$$\alpha_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta'}}{2a} = \frac{-432 - \sqrt{432^2}}{2 \times (-180)} = 2, 4$$

$$\alpha_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta'}}{2a} = \frac{-432 + \sqrt{432^2}}{2 \times (-180)} = 0$$

Nous pouvons maintenant tracer le tableau de signes.

$\alpha$	$-\infty$	0	2, 4	$+\infty$	
$\Delta$	-	0	+	0	-

5. En déduire, en fonction de  $\alpha$ , le nombre de solutions du système de la question 3, puis le nombre de points d'intersection entre  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$ .  
Le nombre de solutions du système 3 est le même que le nombre de points d'intersections entre le cercle  $\mathcal{C}$  et la droite  $\mathcal{D}$ . Donc :

1. C'est un logiciel libre et gratuit, que vous pouvez télécharger et installer gratuitement et légalement sur GNU/Linux, Windows et MacOS : <https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac.html>.

- 
- si  $\alpha \in ]-\infty; 0[ \cup ]2, 4; +\infty[$ , alors  $\Delta$  est strictement négatif, le système n'a pas de solutions, et la droite et le cercle n'ont aucun point d'intersection ;
  - si  $\alpha = 0$  ou  $\alpha = 2, 4$ , alors  $\Delta$  est nul, le système a une seule solution, et la droite et le cercle ont un unique point d'intersection (la droite est alors tangente au cercle) ;
  - si  $\alpha \in ]0; 2, 4[$ , alors  $\Delta$  est strictement positif, le système a deux solutions, et la droite et le cercle ont deux points d'intersection (la droite « traverse » le cercle).