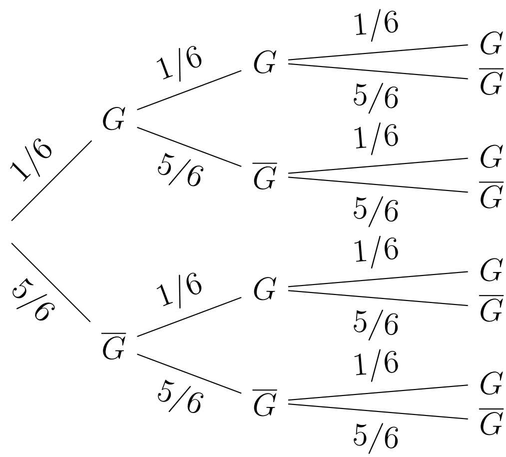
Exercice 1 (7 points)**.** *On joue au jeu suivant. On choisit un nombre entre 1 et 6, et on lance trois fois un dé équilibré. Si ce nombre sort trois fois, on gagne 3€. S'il ne sort que deux fois, on gagne 2€. S'il ne sort qu'une fois, on gagne 1€. Et s'il ne sort pas, on perd 1€.*

1. Sur un seul lancer de dé, *on note G l'évènement : « On a obtenu le numéro choisi. ». Calculer $P(G)$ et $P(\overline{G})$.*
   Le dé est équilibré, donc il y a équiprobabilité, donc : $P(G) = \frac{1}{6}$ et $P\left(\overline{G}\right) = 1 - P\left(G\right) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

On note X la variable aléatoire comptabilisant le nombre de fois où, sur les trois lancers, le nombre choisi est sorti.

2. *Dresser un arbre de probabilité modélisant la situation.*



3. *Recopier et compléter la loi de probabilité suivante.*
   Il y a trois chemins qui permettent d'avoir une seule fois le numéro choisi : $G - \overline{G} - \overline{G}$, $\overline{G} - G - \overline{G}$, $\overline{G} - \overline{G} - G$. Donc

$$\begin{aligned} P(X=1) &= \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \\ &= 3 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 \\ &= \frac{75}{216} \end{aligned}$$

De même, il y a trois chemins qui permettent d'obvenir exactement deux fois le numéro choisi : deux G et un seul $\overline{G}$ (dans n'importe quel ordre). Donc :

$$P(X=2) = 3 \times \frac{5}{6} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{15}{216}$$

x_i	-1	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

4. *Quel est le gain moyen à ce jeu ?*

   Le gain moyen correspond ici à l'espérance de la variable X :

$$\begin{aligned} E(X) &= -1 \times \frac{125}{216} + 1 \times \frac{75}{216} + 2 \times \frac{15}{216} + 3 \times \frac{1}{216} \\ &= -\frac{17}{216} \end{aligned}$$

   Le gain moyen est donc $-\frac{17}{216}$, soit environ $-0,08$ euros.

Exercice 2 (8 points). *D'après le sujet d'E3C n° 43, mai 2020.*
Un parent d'élèves propose un jeu pour la fête de l'école.
Une urne opaque contient 100 billes indiscernables au toucher : 10 billes rouges, 30 billes blanches et 60 billes vertes.
Pour une partie, chaque joueur doit miser 2 jetons. Ensuite, le joueur prélève une bille au hasard dans l'urne.

— *Si la bille prélevée est rouge, le joueur récupère 8 jetons.*

— *Si la bille est blanche, le joueur récupère 4 jetons.*

— *Si la bille est verte, le joueur ne gagne rien.*

On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur en nombre de jetons, c'est-à-dire, le nombre de jetons gagnés diminué de la mise.

1. (a) *Établir que la loi de probabilité de X est donnée par :*
   Les gains possibles sont aucun jeton, quatre jetons ou huit jetons, auxquels il faut retrancher la mise (deux jetons), ce qui donne -2, 2 et 6.
   Il y a équiprobabilité, donc les probabilités sont : $P(X = -2) = \frac{60}{100} = 0,6$; $P(X = 2) = \frac{30}{100} = 0,3$; $P(X = 6) = \frac{10}{100} = 0,1$.
   Ce qui donne la loi suivante.

Valeurs a prises par X	-2	2	6
$P(X = a)$	0,6	0,3	0,1

   (b) *Démontrer que le jeu est équitable, c'est-à-dire que l'espérance de X est nulle.*

$$E(X) = -2 \times 0,6 + 2 \times 0,3 + 6 \times 0,1 = 0$$

   L'espérance est nulle, donc le jeu est équitable.

   (c) *Calculer la variance puis l'écart-type de X . On arrondira au centième.*
   À la calculatrice, on obtient : $V(X) = 7,2$ et $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{7,2}$.

2. *Pour financer les différentes actions de l'école, les organisateurs de la fête veulent modifier le jeu pour qu'il leur devienne favorable. Ils décident alors d'ajouter des billes vertes dans l'urne. Combien de billes vertes doit-on ajouter dans l'urne pour que l'espérance du jeu soit égale à -1 ?* On ajoute n billes vertes à l'urne. Il y a alors 10 billes rouges, 30 billes blanches et $60+n$ billes vertes, soit $10 + 30 + 60 + n = 100 + n$ billes au total. La loi de probabilité est donc :

Valeurs a prises par X	-2	2	6
$P(X = a)$	$\dfrac{60+n}{100+n}$	$\dfrac{30}{100+n}$	$\dfrac{10}{100+n}$

Et l'espérance est :

$$\begin{aligned} E(X) &= -2 \times \frac{60+n}{100+n} + 2 \times \frac{30}{100+n} + 6 \times \frac{10}{100+n} \\ &= \frac{-120-2n+60+60}{100+n} \\ &= \frac{-2n}{100+n} \end{aligned}$$

Or cette espérance doit être égale à -1 :

$$\begin{aligned} E(x) &= -1 \\ \frac{-2n}{100+n} &= -1 \\ \frac{-2n}{100+n} + 1 &= 0 \\ \frac{-2n}{100+n} + \frac{100+n}{100+n} &= 0 \\ \frac{-2n+100+n}{100+n} &= 0 \\ \frac{100-n}{100+n} &= 0 \end{aligned}$$

Donc il faut que $100 - n = 0$ mais que $100 + n \neq 0$.
L'unique solution de $100 - n = 0$ est $n = 100$, et cette solution vérifie bien $100 + n \neq 0$. Donc $n = 100$ est l'unique solution.
Conclusion : Il faut rajouter $\boxed{100}$ billes vertes pour que l'espérance soit égale à -1.