Exercice 1. *Exprimer les expressions suivantes sous la forme ae^{bx+c}, où a, b, c sont des nombres réels.*

$$\begin{aligned}
A &= \left(e^{x-1}\right)^2 \\
&= e^{(x-1)\times 2} \\
&= e^{2x-2} \\
B &= \frac{e^7 \times e^x}{e^5} \\
&= \frac{e^{7+x}}{e^5} \\
&= e^{7+x-5} \\
&= e^{x+2}
\end{aligned}$$

Exercice 2. *L'objet de l'exercice est de résoudre l'équation $3-2e^{x^2-1} \geqslant 1$.*

1. *Montrer que l'équation est équivalente à :*

$$1 \geqslant e^{x^2-1}$$

Isolons l'exponentielle.

$$\begin{aligned}
3 - 2e^{x^2-1} &\geqslant 1 \\
3 - 1 &\geqslant 2e^{x^2-1} \\
2 &\geqslant 2e^{x^2-1} \\
\frac{2}{2} &\geqslant \frac{2e^{x^2-1}}{2} \\
1 &\geqslant e^{x^2-1}
\end{aligned}$$

2. *En déduire que l'équation est équivalente à :*

$$0 \geqslant x^2 - 1$$

Commençons par remarquer que $e^0 = 1$.

$$\begin{aligned} 1 &\geqslant e^{x^2-1} \\ e^0 &\geqslant e^{x^2-1} \\ 0 &\geqslant x^2-1 \end{aligned}$$

3. *En déduire les solutions de l'équation de départ.*

   Reprenons le raisonnement depuis le début (les trois premières lignes correspondent alors aux deux questions précédentes).

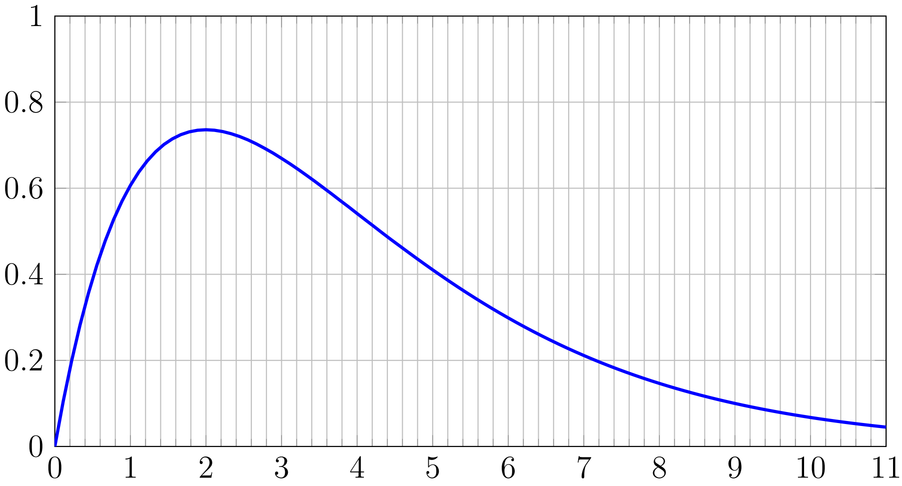
$$\begin{aligned} 3-2e^{x^2-1} &\geqslant 1 \\ 1 &\geqslant e^{x^2-1} \\ 0 &\geqslant x^2-1 \end{aligned}$$

   Or x^2-1 est un trinôme du second degré, de racines 1 et -1 (car $x^2-1 = x^2-1^2 = (x-1)(x+1) = (x-1)(x-(-1))$). Donc les solutions de $x^2-1 \leqslant 0$ sont $x \in [-1;1]$, donc les solutions de l'équation de départ sont aussi : $\boxed{x \in [-1;1]}$.

Exercice 3 (D'après le sujet 29 d'E3C de mai 2020)**.** *La concentration d'un médicament dans le sang en mg.L-1 au cours du temps t, exprimé en heure, est modélisée par la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :*

$$f(t) = te^{-0,5t}$$

dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.



1. *Calculer la valeur de $f(4)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.*

$$\begin{aligned} f(4) &= 4e^{-0,5\times 4} \\ &= 4e^{-2} \\ &\approx 0,54 \end{aligned}$$

   Donc au bout de quatre heures, la concentration du médicament dans le sang sera environ $0{,}54\,\mathrm{mg\,L^{-1}}$.

2. *On note f' la fonction dérivée de f. Montrer que pour tout $t \in [0;+\infty[$,*

$$f'(t) = (1-0,5t)e^{-0,5t}$$

   La fonction f est un produit de deux termes : t et $e^{-0,5t}$. On pose :

   - $u(t) = t$
   - $v(t) = e^{-0,5t}$

   Alors :

   - $u'(t) = 1$
   - $v'(t) = -0,5e^{-0,5t}$

Et donc, puisque $(uv)' = u'v + v'u$, alors :

$$\begin{aligned} f'(t) &= 1 \times e^{-0{,}5t} + (-0,5)e^{-0{,}5t} \times t \\ &= e^{-0{,}5t} - 0,5te^{-0{,}5t} \\ &= (1-0,5t)e^{-0{,}5t} \end{aligned}$$

3. *Étudier le signe de $f'(t)$ sur $[0;+\infty[$.* Puisqu'une exponentielle est toujours positive, alors $f'(t)$ est du signe de $1-0,5t$, qui est une fonction affine décroissante, qui s'annule en $-\frac{1}{-0{,}5} = 2$.
   Le tableau de signes est tracé à la question suivante.
4. *Déduire de la question précédente le tableau de variations de la fonction f sur $[0;+\infty[$.*

t	0		2		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow$	

   Pour obtenir les extremums, on a calculé $f(2) = 2e^{-0{,}5\times 2} = 2e^{-1} = \frac{2}{e}$ et $f(0) = 0 \times e^{-0{,}5\times 0} = 0$.
5. *Quelle est la concentration maximale du médicament dans le sang ? On donnera la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près.*
   D'après le tableau de variations, le maximum de f est $\frac{2}{e}$. Donc la concentration maximale du médicament sera donc $\frac{2}{e} \approx 0{,}74\,\mathrm{mg\,L^{-1}}$.