

Exercice 1. Exprimer les expressions suivantes sous la forme ae^{bx+c} , où a, b, c sont des nombres réels.

$$\begin{aligned} A &= (e^{x-1})^2 \\ &= e^{(x-1) \times 2} \\ &= e^{2x-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{e^7 \times e^x}{e^5} \\ &= \frac{e^{7+x}}{e^5} \\ &= e^{7+x-5} \\ &= e^{x+2} \end{aligned}$$

Exercice 2. L'objet de l'exercice est de résoudre l'équation $3 - 2e^{x^2-1} \geq 1$.

1. Montrer que l'équation est équivalente à :

$$1 \geq e^{x^2-1}$$

Isolons l'exponentielle.

$$\begin{aligned} 3 - 2e^{x^2-1} &\geq 1 \\ 3 - 1 &\geq 2e^{x^2-1} \\ 2 &\geq 2e^{x^2-1} \\ \frac{2}{2} &\geq \frac{2e^{x^2-1}}{2} \\ 1 &\geq e^{x^2-1} \end{aligned}$$

2. En déduire que l'équation est équivalente à :

$$0 \geq x^2 - 1$$

Commençons par remarquer que $e^0 = 1$.

$$\begin{aligned}1 &\geq e^{x^2-1} \\ e^0 &\geq e^{x^2-1} \\ 0 &\geq x^2 - 1\end{aligned}$$

3. *En déduire les solutions de l'équation de départ.*

Reprenons le raisonnement depuis le début (les trois premières lignes correspondent alors aux deux questions précédentes).

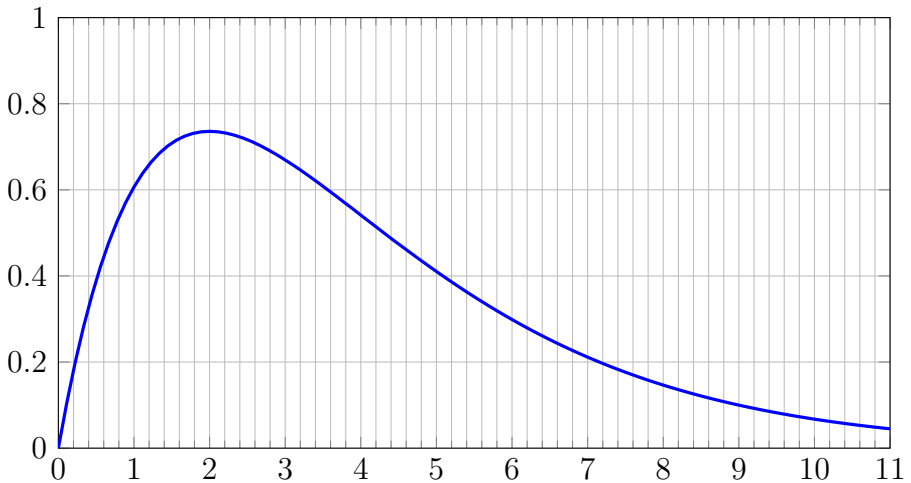
$$\begin{aligned}3 - 2e^{x^2-1} &\geq 1 \\ 1 &\geq e^{x^2-1} \\ 0 &\geq x^2 - 1\end{aligned}$$

Or $x^2 - 1$ est un trinôme du second degré, de racines 1 et -1 (car $x^2 - 1 = x^2 - 1^2 = (x - 1)(x + 1) = (x - 1)(x - (-1))$). Donc les solutions de $x^2 - 1 \leq 0$ sont $x \in [-1; 1]$, donc les solutions de l'équation de départ sont aussi : $x \in [-1; 1]$.

Exercice 3 (D'après le sujet 29 d'E3C de mai 2020). *La concentration d'un médicament dans le sang en mg.L^{-1} au cours du temps t , exprimé en heure, est modélisée par la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :*

$$f(t) = te^{-0,5t}$$

dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.



1. Calculer la valeur de $f(4)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

$$\begin{aligned} f(4) &= 4e^{-0,5 \times 4} \\ &= 4e^{-2} \\ &\approx 0,54 \end{aligned}$$

Donc au bout de quatre heures, la concentration du médicament dans le sang sera environ $0,54 \text{ mg L}^{-1}$.

2. On note f' la fonction dérivée de f . Montrer que pour tout $t \in [0; +\infty[$,

$$f'(t) = (1 - 0,5t)e^{-0,5t}$$

La fonction f est un produit de deux termes : t et $e^{-0,5t}$. On pose :

- $u(t) = t$
- $v(t) = e^{-0,5t}$

Alors :

- $u'(t) = 1$
- $v'(t) = -0,5e^{-0,5t}$

Et donc, puisque $(uv)' = u'v + v'u$, alors :

$$\begin{aligned} f'(t) &= 1 \times e^{-0,5t} + (-0,5)e^{-0,5t} \times t \\ &= e^{-0,5t} - 0,5te^{-0,5t} \\ &= (1 - 0,5t)e^{-0,5t} \end{aligned}$$

3. *Étudier le signe de $f'(t)$ sur $[0; +\infty[$. Puisqu'une exponentielle est toujours positive, alors $f'(t)$ est du signe de $1 - 0,5t$, qui est une fonction affine décroissante, qui s'annule en $-\frac{1}{-0,5} = 2$.
Le tableau de signes est tracé à la question suivante.*
4. *Déduire de la question précédente le tableau de variations de la fonction f sur $[0; +\infty[$.*

t	0	2	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-
f	0	$\frac{2}{e}$	

Pour obtenir les extremums, on a calculé $f(2) = 2e^{-0,5 \times 2} = 2e^{-1} = \frac{2}{e}$ et $f(0) = 0 \times e^{-0,5 \times 0} = 0$.

5. *Quelle est la concentration maximale du médicament dans le sang ? On donnera la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près.*

D'après le tableau de variations, le maximum de f est $\frac{2}{e}$. Donc la concentration maximale du médicament sera donc $\frac{2}{e} \approx 0,74 \text{ mg L}^{-1}$.