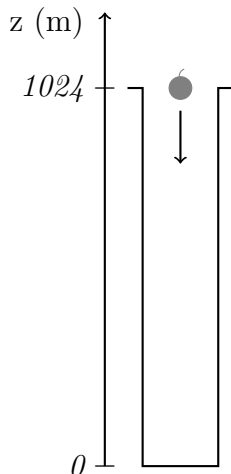


**Exercice 1.**

Isaac voudrait déterminer la valeur de  $g$ , intensité de la pesanteur, chez lui. Pour cela, il lâche une pomme du haut du puits d'une mine à Pendleton (Grande-Bretagne), haut de 1024 m, et chronomètre son temps de chute.

L'altitude de la pomme est mesurée à partir du fond du puits : elle est de 0 m au fond, et 1024 m en haut.

Isaac sait que cette altitude en fonction du temps est un polynôme de la forme  $z : t \mapsto at^2 + bt + c$ , où  $t$  est le temps de chute. Par exemple,  $z(0)$  est l'altitude initiale, et  $z(3)$  est l'altitude après trois secondes de chute. Le but de l'exercice est de déterminer les valeurs de  $a$ ,  $b$  et  $c$ , pour en déduire la valeur de l'intensité de la pesanteur  $g$ .



- (1) Combien vaut l'altitude initiale  $z(0)$  ? En déduire que  $c = 1024$ .

Au départ, la pomme est au sommet du puit, donc  $z(0) = 1024$ . En utilisant l'expression de  $z$ , on trouve que :

$$z(0) = a \times 0^2 + b \times 0 + c = c$$

Donc  $\boxed{c=1024}$ .

- (2) La vitesse  $v$  de la chute est égale à la dérivée de la fonction  $z$ . Par exemple,  $v(2) = z'(2)$  est la vitesse de la pomme après deux secondes de chute.

- (a) Dériver  $z$ , et en déduire l'expression de  $v$  en fonction de  $a$  et  $b$ .

Puisque  $z$  est un polynôme, on a :  $z'(t) = 2at + b$ . Donc

$$\boxed{v(t) = z'(t) = 2at + b}.$$

(b) *Quelle est la vitesse initiale ? En déduire que  $b = 0$ .*

La pomme est lâchée du sommet, donc  $v(0) = 0$ . Or  $v(0) = 2a \times 0 + b = b$ . Donc  $\boxed{b = 0}$ .

(c) *Exprimer  $z$  et  $v$  en fonction de  $a$  et  $t$ .*

$$v(t) = 2at$$

$$z(t) = at^2 + 1024$$

(3) *Isaac, aidé de Gottfried, a mesuré que la chute a duré 14,5 s. Traduire cette information par une équation, et montrer que  $a = -4,87$ .*

La chute s'arrête lorsque la pomme atteint le fond du puits, c'est-à-dire quand  $z(t) = 0$ . Donc,  $z(14,5) = 0$ , et  $a \times 14,5^2 + 1024 = 0$ . Donc  $a = -\frac{1024}{14,5^2} \approx -4,87$ .

(4) *Calculer la dérivée de  $v$ ; c'est une constante égale à  $-g$ . Conclure en déterminant la valeur de  $g$ .*

La dérivée de  $v$  est  $v'(t) = 2a \approx 2 \times (-4,87) \approx -9,74$ . Donc  $-g \approx -9,74$ , et  $\boxed{g \approx 9,74}$ .

*Bonus : La constante  $g$  calculée est l'intensité de la pesanteur, dont l'unité est  $N.kg^{-1}$  ou  $m.s^{-2}$ .*

## Exercice 2 (Calcul de fonction dérivées).

1. *On considère la fonction  $f : x \mapsto x^2 - 3x + 1$ , définie sur  $\mathbb{R}$ , et  $a$  un réel.*

(a) *Montrer que pour un réel  $h$  non nul, le taux d'accroissement en  $a$  est égal à  $2a + h - 3$ .*

Calculons le taux d'accroissement :

$$\begin{aligned}
 & \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\
 &= \frac{(a+h)^2 - 3 \times (a+h) + 1 - (a^2 - 3a + 1)}{h} \\
 &= \frac{a^2 + 2ah + h^2 - 3a - 3h + 1 - a^2 + 3a - 1}{h} \\
 &= \frac{2ah + h^2 - 3h}{h} \\
 &= \frac{h(2a + h - 3)}{h} \\
 &= 2a + h - 3
 \end{aligned}$$

- (b) En déduire la valeur de  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  (en fonction de  $a$ ), et donc la valeur de  $f'(a)$ .

Lorsque  $h$  tend vers 0, le taux d'accroissement  $2a + h - 3$  tend vers  $2a - 3$ . Donc :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 2a - 3$$

Donc la fonction  $f$  est dérivable, et  $f'(a) = 2a - 3$ .

- (c) Application : Calculer  $f'(2)$ , et tracer dans un repère orthonormé la courbe de  $f$  (sur l'intervalle  $[0; 4]$ ), ainsi que sa tangente en 2.

Le nombre dérivé de  $f$  en 2 est  $f'(2) = 2 \times 2 - 3 = 1$ .

Voir le graphique à la fin.

2. On considère la fonction  $f : x \mapsto \sqrt{x}$ , définie sur  $\mathbb{R}^+$ , et  $a$  un réel strictement positif.

- (a) Montrer que pour un réel  $h$  non nul (et tel que  $a + h \geq 0$ ), le taux d'accroissement en  $a$  est égal à  $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a+h}}$ .

Calculons le taux d'accroissement :

$$\begin{aligned}
 & \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\
 &= \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} \\
 &= \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} \times \frac{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} \\
 &= \frac{\sqrt{a+h}^2 - \sqrt{a}^2}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} \\
 &= \frac{a+h-a}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} \\
 &= \frac{h}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}
 \end{aligned}$$

(b) *Même énoncé que la question 1b.*

Lorsque  $h$  tend vers 0,  $\sqrt{a+h}$  tend vers  $\sqrt{a}$ , donc le taux d'accroissement tend vers  $\frac{1}{2\sqrt{a}}$ . Donc la fonction  $f$  est dérivable (en  $a \neq 0$ ), et :

$$f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

(c) *Même énoncé que la question 1c.*

Le nombre dérivé de  $f$  en 2 vaut :  $f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0,35$ .  
Voir le graphique ci-dessous.

