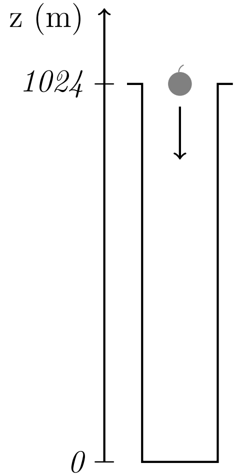
Exercice 1.



Isaac voudrait déterminer la valeur de g, intensité de la pesanteur, chez lui. Pour cela, il lâche une pomme du haut du puits d'une mine à Pendleton (Grande-Bretagne), haut de 1 024 m, et chronomètre son temps de chute.
L'altitude de la pomme est mesurée à partir du fond du puits : elle est de 0 m au fond, et 1 024 m en haut.
Isaac sait que cette altitude en fonction du temps est un polynôme de la forme $z : t \mapsto at^2 + bt + c$, où t est le temps de chute. Par exemple, $z(0)$ est l'altitude initiale, et $z(3)$ est l'altitude après trois secondes de chute. Le but de l'exercice est de déterminer les valeurs de a, b et c, pour en déduire la valeur de l'intensité de la pesanteur g.

(1) *Combien vaut l'altitude initiale $z(0)$? En déduire que $c = 1024$.*

Au départ, la pomme est au sommet du puit, donc $z(0) = 1024$. En utilisant l'expression de z, on trouve que :

$$z(0) = a \times 0^2 + b \times 0 + c = c$$

Donc $\boxed{\text{c=1024}}$.

(2) *La vitesse v de la chute est égale à la dérivée de la fonction z. Par exemple, $v(2) = z'(2)$ est la vitesse de la pomme après deux secondes de chute.*

(a) *Dériver z, et en déduire l'expression de v en fonction de a et b.*

Puisque z est un polynôme, on a : $z'(t) = 2at + b$. Donc $\boxed{v(t) = z'(t) = 2at + b}$.

(b) *Quelle est la vitesse initiale ? En déduire que $b = 0$.*
La pomme est lâchée du sommet, donc $v(0) = 0$. Or $v\left(0\right) = 2a \times 0 + b = b$. Donc $\boxed{b = 0}$.

(c) *Exprimer z et v en fonction de a et t.*

$$\begin{aligned} v\left(t\right) &= 2at \\ z\left(t\right) &= at^2 + 1024 \end{aligned}$$

(3) *Isaac, aidé de Gottfried, a mesuré que la chute a duré 14,5* s. *Traduire cette information par une équation, et montrer que $a = -4,87$.*
La chute s'arrête lorsque la pomme atteint le fond du puits, c'est-à-dire quand $z\left(t\right) = 0$. Donc, $z(14,5) = 0$, et $a \times 14,5^2 + 1024 = 0$. Donc $a = -\frac{1024}{14,5^2} \approx -4,87$.

(4) *Calculer la dérivée de v ; c'est une constante égale à $-g$. Conclure en déterminant la valeur de g.*
La dérivée de v est $v'\left(t\right) = 2a \approx 2 \times (-4,87) \approx -9,74$. Donc $-g \approx -9,74$, et $\boxed{g \approx 9,74}$.
Bonus : La constante g calculée est l'intensité de la pesanteur, dont l'unité est $N.kg^{-1}$ ou $m.s^{-2}$.

Exercice 2 (Calcul de fonction dérivées)**.**

1. *On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 - 3x + 1$, définie sur $\mathbb{R}$, et a un réel.*

   (a) *Montrer que pour un réel h non nul, le taux d'accroissement en a est égal à $2a + h - 3$.*

Calculons le taux d'accroissement :

$$\begin{aligned}
&\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\\
&=\frac{(a+h)^2-3\times(a+h)+1-(a^2-3a+1)}{h}\\
&=\frac{\cancel{a^2}+2ah+h^2-\cancel{3a}-3h+\cancel{1}-\cancel{a^2}+\cancel{3a}-\cancel{1}}{h}\\
&=\frac{2ah+h^2-3h}{h}\\
&=\frac{\cancel{h}(2a+h-3)}{\cancel{h}}\\
&=2a+h-3
\end{aligned}$$

(b) *En déduire la valeur de $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (en fonction de a), et donc la valeur de $f'(a)$.*

Lorsque h tend vers 0, le taux d'accroissement $2a+h-3$ tend vers $2a-3$. Donc :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=2a-3$$

Donc la fonction f est dérivable, et $\boxed{f'(a)=2a-3}$.

(c) Application : *Calculer $f'(2)$, et tracer dans un repère orthonormé la courbe de f (sur l'intervalle $[0;4]$), ainsi que sa tangente en 2.*

Le nombre dérivé de f en 2 est $f'(2)=2\times 2-3=1$.

Voir le graphique à la fin.

2. *On considère la fonction $f : x\mapsto\sqrt{x}$, définie sur $\mathbb{R}^+$, et a un réel strictement positif.*

(a) *Montrer que pour un réel h non nul (et tel que $a+h\geqslant 0$), le taux d'accroissement en a est égal à $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+h}}$.*

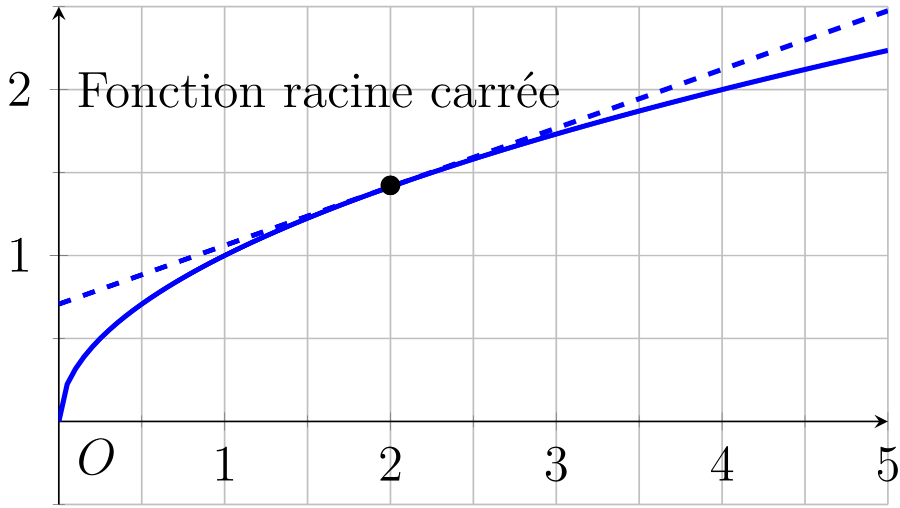
Calculons le taux d'accroissement :

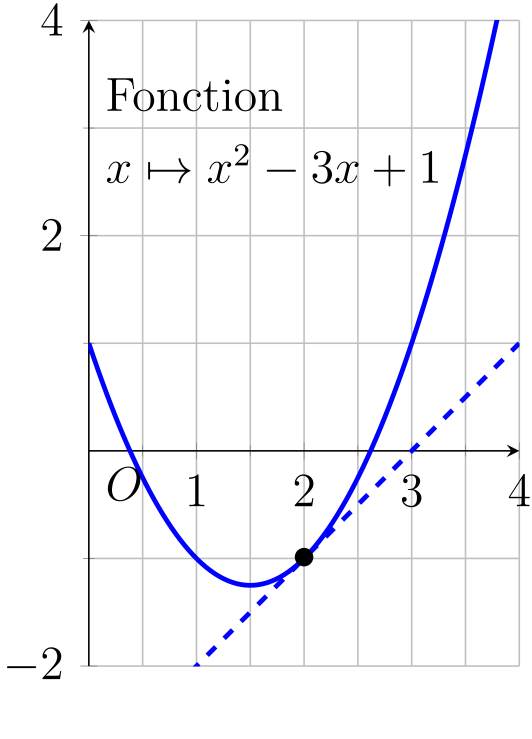
$$\begin{aligned}
&\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\\
&=\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}\\
&=\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}\times\frac{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}\\
&=\frac{\sqrt{a+h}^2-\sqrt{a}^2}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)}\\
&=\frac{\cancel{a}+h-\cancel{a}}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)}\\
&=\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)}\\
&=\frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}
\end{aligned}$$

(b) *Même énoncé que la question 1b.*
Lorsque h tend vers 0, $\sqrt{a+h}$ tend vers $\sqrt{a}$, donc le taux d'accroissement tend vers $\frac{1}{2\sqrt{a}}$. Donc la fonction f est dérivable (en $a \neq 0$), et :

$$\boxed{f'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}}}$$

(c) *Même énoncé que la question 1c.*
Le nombre dérivé de f en 2 vaut : $f'(2)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\approx 0,35$. Voir le graphique ci-dessous.


Fonction racine carrée
2
1
O
1
2
3
4
5


Fonction
$x \mapsto x^2 - 3x + 1$
4
2
−2
O
1
2
3
4