Faire un des deux exercices 2 ou 3 au choix (l'exercice 3 est plus difficile). L'exercice 1 est obligatoire.

Exercice 1 (Culture générale)**.** Citez un problème ouvert en mathématiques (c'est-à-dire un problème que personne au monde ne sait résoudre).

Exercice 2 (Lieu géométrique)**.** Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère :

— le cercle $\mathcal{C}$ de centre $A(13;9)$ et de rayon 6 ;

— la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 2x - 5$.

On cherche à déterminer les coordonnées des intersections de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.

1. Soit $M(x;y)$ un point de $\mathcal{C}$. Déterminer la longueur AM, puis justifier que $(x-13)^2 + (y-9)^2 = 36$.

On considère un point $M(x;y)$ du plan. On admet que ce point est sur le cercle $\mathcal{C}$ si et seulement si l'équation $(x-13)^2 + (y-9)^2 = 36$ est vérifiée.

2. Montrer que M est à la fois sur $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ si et seulement si :

$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ (x-13)^2 + (2x-14)^2 = 36 \end{cases}$$

3. En déduire que M est à la fois sur $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ si et seulement si :

$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ 5x^2 - 82x + 329 = 0 \end{cases}$$

4. Résoudre la seconde équation, et en déduire les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.

Exercice 3 (Lieu géométrique)**.** Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère :

— le nombre réel α ;

— le cercle $\mathcal{C}$ de centre $A(13;9)$ et de rayon 6 ;

— la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = \alpha x - 4\alpha + 3$.

La droite n'est donc pas « fixe » : elle dépend d'un paramètre α. On cherche à déterminer le nombre de points d'intersections de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ en fonction de ce paramètre α.

1. Soit $M(x;y)$ un point de $\mathcal{C}$. Déterminer la longueur AM, puis justifier que $(x-13)^2+(y-9)^2=36$.

On considère un point $M(x;y)$ du plan. On admet que ce point est sur le cercle $\mathcal{C}$ si et seulement si l'équation $(x-13)^2+(y-9)^2=36$ est vérifiée.

2. Montrer que M est à la fois sur $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ si et seulement si :

$$\begin{cases} y=\alpha x-4\alpha+3 \\ (x-13)^2+(\alpha x-4\alpha-6)^2=36 \end{cases}$$

3. En déduire que M est à la fois sur $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ si et seulement si :

$$\begin{cases} y=\alpha x-4\alpha+3 \\ \left(\alpha^2+1\right)x^2-\left(8\alpha^2+12\alpha+26\right)x+16\alpha^2+48\alpha+169=0 \end{cases}$$

Puisque les solutions de la seconde équation correspondent aux valeurs possible de x (abscisse des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$), et que pour chaque abscisse il n'y a qu'une ordonnée correspondante (d'après la première équation), alors le nombre de solutions de la seconde équation correspond au nombre de points d'intersection entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.
On calcule le discriminant de l'expression précédente, soit :

$$\Delta=\left(8\alpha^2+12\alpha+26\right)^2-4\times\left(\alpha^2+1\right)\left(16\alpha^2+48\alpha+169\right)$$

Pour éviter les erreurs de calculs, on fait développer cette expression par le logiciel de calcul formel Xcas[1].

developper$((8\alpha^2+12\alpha+26)^2-4*(\alpha^2+1)*(16\alpha^2+48\alpha+169))$
$-180*\alpha^2+432*\alpha$

4. Dresser, en fonction de α, le tableau de signes de l'expression $-180\alpha^2+432\alpha$.

5. En déduire, en fonction de α, le nombre de solutions du système de la quetion 3, puis le nombre de points d'intersection entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.

1. C'est un logiciel libre et gratuit, que vous pouvez télécharger et installer gratuitement et légalement sur Gnu/Linux, Windows et MacOS : `https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac.html`.