Exercice 1 (Lieu géométrique). *Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère :*

- *le cercle $\mathcal{C}$ de centre $A(13; 9)$ et de rayon 6 ;*
- *la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 2x - 5$.*

On cherche à déterminer les coordonnées des intersections de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.

1. *Soit $M(x; y)$ un point de $\mathcal{C}$. Déterminer la longueur AM, puis justifier que $(x - 13)^2 + (y - 9)^2 = 36$.*

   Puisque M est un point du cercle de centre A, alors $[AM]$ est un rayon, donc $AM = 6$.

$$\begin{aligned} AM &= 6 \\ \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} &= 6 \\ \sqrt{(x - 13)^2 + (y - 9)^2} &= 6 \\ (x - 13)^2 + (y - 9)^2 &= 6^2 \\ (x - 13)^2 + (y - 9)^2 &= 36 \end{aligned}$$

On considère un point $M(x; y)$ du plan. On admet que ce point est sur le cercle $\mathcal{C}$ si et seulement si l'équation $(x - 13)^2 + (y - 9)^2 = 36$ est vérifiée.

2. *Montrer que M est à la fois sur $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ si et seulement si :*

$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ (x - 13)^2 + (2x - 14)^2 = 36 \end{cases}$$

   Le point M est à la fois sur la droite et le cercle si les deux équations sont vérifiées, c'est-à-dire si $y = 2x - 5$ et $(x - 13)^2 + (y - 9)^2 = 36$. Puisque l'équation de la droite est respectée, nous pouvons remplacer le y de l'équation du cercle par $2x - 5$, donc :

$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ (x - 13)^2 + (y - 9)^2 = 36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ (x - 13)^2 + (2x - 5 - 9)^2 = 36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ (x-13)^2 + (2x-14)^2 = 36 \end{cases}$$

3. *En déduire que M est à la fois sur $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ si et seulement si :*

$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ 5x^2 - 82x + 329 = 0 \end{cases}$$

Dans le système d'équation précédent, développons la seconde équation.

$$\begin{aligned} & (x-13)^2 + (2x-14)^2 = 36 \\ \iff\ & x^2 - 2 \times x \times 13 + 13^2 + (2x)^2 - 2 \times 2x \times 14 + 14^2 = 36 \\ \iff\ & x^2 - 26x + 169 + 4x^2 - 56x + 196 - 36 = 0 \\ \iff\ & 5x^2 - 82x + 329 = 0 \end{aligned}$$

Donc le point M est sur $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ si et seulement si :

$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ 5x^2 - 82x + 329 = 0 \end{cases}$$

4. *Résoudre la seconde équation, et en déduire les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.*

Résolvons cette seconde équation : c'est un trinôme du second degré avec $a = 5$, $b = -82$, $c = 329$. Son discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = (-82)^2 - 4 \times 5 \times 329 = 144$. Le discriminant est strictement positif, donc il y a deux solutions :

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} &= \tfrac{-(-82)-\sqrt{144}}{2\times 5} &= 7 \\ x_2 &= \tfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} &= \tfrac{-(-82)+\sqrt{144}}{2\times 5} &= 9,4 \end{aligned}$$

Nous avons deux valeurs possibles pour x. Utilisons l'équation de la droite pour trouver les valeurs correspondantes pour y.

(a) Si $x = 7$, alors $y = 2 \times 7 - 5 = 9$.

(b) Si $y = 9,4$, alors $y = 2 \times 9,4 - 5 = 13,8$.

Le cercle et la droite ont donc deux points d'intersection, de coordonnées $\binom{7}{9}$ et $\binom{9,4}{13,8}$.

Exercice 2 (Droite et Cercle). *Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère :*

— *le nombre réel α ;*

— *le cercle $\mathcal{C}$ de centre $A(13; 9)$ et de rayon 6 ;*

— *la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = \alpha x - 4\alpha + 3$.*

La droite n'est donc pas « fixe » : elle dépend d'un paramètre α. On cherche à déterminer le nombre de points d'intersections de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ en fonction de ce paramètre α.

1. *Soit $M(x; y)$ un point de $\mathcal{C}$. Déterminer la longueur AM, puis justifier que $(x - 13)^2 + (y - 9)^2 = 36$.*

   Voir la correction de la question 1 de l'execice 1.

On considère un point $M(x; y)$ du plan. On admet que ce point est sur le cercle $\mathcal{C}$ si et seulement si l'équation $(x - 13)^2 + (y - 9)^2 = 36$ est vérifiée.

2. *Montrer que M est à la fois sur $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ si et seulement si :*

$$\begin{cases} y = \alpha x - 4\alpha + 3 \\ (x - 13)^2 + (\alpha x - 4\alpha - 6)^2 = 36 \end{cases}$$

   Le point M est à la fois sur la droite et le cercle si les deux équations sont vérifiées, c'est-à-dire si $y = \alpha x - 4\alpha + 3$ et $(x - 13)^2 + (y - 9)^2 = 36$. Puisque l'équation de la droite est respectée, nous pouvons remplacer le y de l'équation du cercle par $\alpha x - 4\alpha + 3$, donc :

$$\begin{cases} y = \alpha x - 4\alpha + 3 \\ (x - 13)^2 + (y - 9)^2 = 36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \alpha x - 4\alpha + 3 \\ (x - 13)^2 + (\alpha x - 4\alpha + 3 - 9)^2 = 36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \alpha x - 4\alpha + 3 \\ (x - 13)^2 + (\alpha x - 4\alpha - 6)^2 = 36 \end{cases}$$

3. *En déduire que M est à la fois sur $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ si et seulement si :*

$$\begin{cases} y = \alpha x - 4\alpha + 3 \\ (\alpha^2 + 1)\, x^2 - (8\alpha^2 + 12\alpha + 26)\, x + 16\alpha^2 + 48\alpha + 169 = 0 \end{cases}$$

Développons la seconde équation du système précédent. Commençons par développer le second carré, avec la triple distributivité :

$$\begin{aligned}
&(\alpha x - 4\alpha - 6)^2 \\
&= (\alpha x - 4\alpha - 6) \times (\alpha x - 4\alpha - 6) \\
&= \alpha^2x^2 - 4\alpha^2x - 6\alpha x - 4\alpha^2x + 16\alpha^2 + 24\alpha - 6\alpha x + 24\alpha + 36 \\
&= \alpha^2x^2 + \left(-4\alpha^2 - 6\alpha - 4\alpha^2 - 6\alpha\right)x + 16\alpha^2 + 24\alpha + 24\alpha + 36 \\
&= \alpha^2x^2 + \left(-8\alpha^2 - 12\alpha\right)x + 16\alpha^2 + 48\alpha + 36
\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant développer la seconde équation du système de la question précédente.

$$\begin{aligned}
(x-13)^2 + (\alpha x - 4\alpha - 6)^2 &= 36 \\
x^2 - 26x + 13^2 + \alpha^2x^2 + \left(-8\alpha^2 - 12\alpha\right)x + 16\alpha^2 + 48\alpha + 36 &= 36 \\
\left(\alpha^2 + 1\right)x^2 + \left(-8\alpha^2 - 12\alpha - 26\right)x + 16\alpha^2 + 48\alpha + 36 + 169 - 36 &= 0 \\
\left(\alpha^2 + 1\right)x^2 - \left(8\alpha^2 + 12\alpha + 26\right)x + 16\alpha^2 + 48\alpha + 169 &= 0
\end{aligned}$$

Puisque les solutions de la seconde équation correspondent aux valeurs possible de x (abscisse des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$), et que pour chaque abscisse il n'y a qu'une ordonnée correspondante (d'après la première équation), alors le nombre de solutions de la seconde équation correspond au nombre de points d'intersection entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.
On calcule le discriminant de l'expression précédente, soit :

$$\Delta = \left(8\alpha^2 + 12\alpha + 26\right)^2 - 4 \times \left(\alpha^2 + 1\right)\left(16\alpha^2 + 48\alpha + 169\right)$$

Pour éviter les erreurs de calculs, on fait développer cette expression par le logiciel de calcul formel Xcas[1]*.*

developper$((8\alpha^2 + 12\alpha + 26)^2 - 4 * (\alpha^2 + 1) * (16\alpha^2 + 48\alpha + 169))$
$-180 * \alpha^2 + 432 * \alpha$

1. C'est un logiciel libre et gratuit, que vous pouvez télécharger et installer gratuitement et légalement sur GNU/Linux, Windows et MacOS : `https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac.html`.

4. *Dresser, en fonction de α, le tableau de signes de l'expression $-180\alpha^2 + 432\alpha$.*

   Cette expression est un trinôme du second degré, avec $a = -180$, $b = 432$, $c = 0$. Son discriminant est $\Delta' = b^2 - 4ac = 432^2 - 4 \times (-180) \times 0 = 432^2$. Le discriminant est positif, donc il y a deux racines :

$$\begin{array}{llll} \alpha_1 & = \frac{-b-\sqrt{\Delta'}}{2a} & = \frac{-432-\sqrt{432^2}}{2\times(-180)} & = 0 \\ \alpha_2 & = \frac{-b+\sqrt{\Delta'}}{2a} & = \frac{-432+\sqrt{432^2}}{2\times(-180)} & = -2,4 \end{array}$$

   Nous pouvons maintenant tracer le tableau de signes.

α	$-\infty$		$-2,4$		0		$+\infty$
Δ		$-$	0	$+$	0	$-$	

5. *En déduire, en fonction de α, le nombre de solutions du système de la quetion 3, puis le nombre de points d'intersection entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.*

   Le nombre de solutions du système 3 est le même que le nombre de points d'intersections entre le cercle $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}$. Donc :

   — si $\alpha \in]-\infty; -2,4[\cup]-\infty; 0[$, alors Δ est strictement négatif, le système n'a pas de solutions, et la droite et le cercle n'ont aucun point d'intersection ;

   — si $\alpha = 0$ ou $\alpha = -2,4$, alors Δ est nul, le système a une seule solution, et la droite et le cercle ont un unique point d'intersection (la droite est alors tangente au cercle) ;

   — si $\alpha \in]-2,4; 0[$, alors Δ est strictement positif, le système a deux solutions, et la droite et le cercle ont deux points d'intersection (la droite « traverse » le cercle).