Applications à la dérivation

Exercice 1 (Dérivation)**.** *Dériver la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ par $f : x \mapsto \frac{x+1}{x-3}$.* La fonction est de type $\frac{u}{v}$ (avec $u(x) = x+1$ et $v(x) = x-3$, donc $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 1$), donc sa dérivée est :

$$\frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{1 \times (x-3) - 1 \times (x+1)}{(x-3)^2} = \frac{x-3-x-1}{(x-3)^2} = -\frac{4}{(x-3)^2}$$

Donc $\boxed{f'(x) = -\frac{4}{(x-3)^2}}$.

Exercice 2 (Distance d'un point à une courbe)**.** *On considère la courbe de la fonction carré $f : x \mapsto x^2$, sa courbe $\mathcal{C}$, et le point $A(0,4)$ dans le plan ramené à un repère orthonormé. Le but de l'exercice est de déterminer quel est le point de $\mathcal{C}$ le plus proche de A.*
Soit $M(x;y)$ un point de $\mathcal{C}$.

1. *Montrer que $AM = \sqrt{x^4 - 7x^2 + 16}$.*
   Le point M est sur $\mathcal{C}$, donc ses coordonnées sont $M\binom{x}{x^2}$. Donc :

$$\begin{aligned} AM &= \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(x-0)^2 + (x^2-4)^2} \\ &= \sqrt{x^2 + \left(x^2\right)^2 - 2 \times 4 \times x^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{x^4 - 7x^2 + 16} \end{aligned}$$

On pose $g : x \mapsto x^4 - 7x^2 + 16$.

2. *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $g'(x) = 2x\left(2x^2 - 7\right)$.* D'une part, on a $g'(x) = 4 \times x^3 - 7 \times 2x = 4x^3 - 14x$.
   D'autre part :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2x(2x^2 - 7) \\ &= 2x \times 2x^2 - 2x \times 7 \\ &= 4x^3 - 14x \end{aligned}$$

   Donc $g'(x) = 2x(2x^2 - 7)$.

3. *Montrer que le tableau de variations de g est le suivant (on ne demande pas de calculer les valeurs des extremums).*
La fonction $x \mapsto 2x^2 - 7$ est un trinôme du second degré, de racines $-\sqrt{\frac{7}{2}}$ et $\sqrt{\frac{7}{2}}$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{7}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{7}{2}}$		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x^2-7$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

4. *En déduire les variations de f.* Puisque la fonction racine conserve les variations, et que $f = \sqrt{g}$, alors les variations de f sont les mêmes que celles de g.

5. *Répondre au problème posé : Pour quelles valeurs de x la distance AM est-elle minimale ?* Les minimums de la fonction f sont donc atteints aux mêmes abscisses que ceux de la fonction g, c'est-à-dire $-\sqrt{\frac{7}{2}}$ et $\sqrt{\frac{7}{2}}$. Donc la distance AM est minimale pour $x = -\sqrt{\frac{7}{2}}$ et $x = \sqrt{\frac{7}{2}}$.

Exercice 3.

1. (a) La fonction f, comme la fonction f', sont des polynômes. Elles sont donc définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

   (b)

$$\begin{aligned}
f(x) &= 3x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 12x + 12 \\
f'(x) &= 3 \times 4x^3 - 4 \times 3x^2 + 6 \times 2x - 12 \\
&= 12x^3 - 12x^2 + 12x - 12 \\
f''(x) &= 12 \times 3x^2 - 12 \times 2x + 12 \\
&= 36x^2 - 24x + 12
\end{aligned}$$

2. La dérivée seconde f'' est un trinôme du second degré, de discriminant $\Delta = (-24)^2 - 4 \times 36 \times 12 = -1152$. Il n'y a donc aucune racine, et la fonction f'' est toujours positive (car le coefficient 36 est lui-même positif). Cela donne le tableau de signes et de variations suivant.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	
f'		$\nearrow$	

3. Calculons l'image de 1 par f'.

$$\begin{aligned} f'(1) &= 12 \times 1^3 - 12 \times 1^2 + 12 \times 1 - 12 \\ &= 12 - 12 + 12 - 12 \\ &= 0 \end{aligned}$$

La fonction f' est, d'après la question précédente, une fonction strictement croissante. Or $f'(1) = 0$.

— Donc pour tout nombre $x < 1$, puisque f' est strictement croissante, elle conserve le sens de l'inégalité, donc $f'(x) < f'(1)$, et $f'(x) < 0$.

— De même, pour tout nombre $x > 1$, puisque f' est strictement croissante, elle conserve le sens de l'inégalité, donc $f'(x) > f'(1)$, et $f'(x) > 0$.

4. D'après la question précédente, voici le tableau de signes de f', duquel on déduit les variations de f.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	