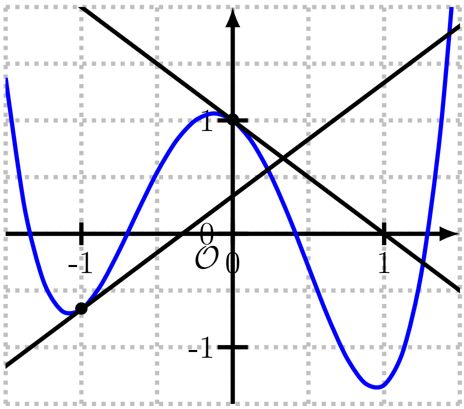
Dérivation

Exercice 1 (3 points)**.** On considère la fonction f, dont voici la représentation graphique. On a également tracé deux tangentes, au points d'abscisses -1 et 0.



1. Donner une valeur approchée des nombres suivants, par lecture graphique : (a) $f(-1)$ (b) $f'(-1)$ (c) $f(0)$ (d) $f'(0)$.
2. Sur l'intervalle représenté, quelles sont les solutions approchées de l'équation $f'(x) = 0$?

Exercice 2 (4 points)**.** Déterminer l'expression de la dérivée des fonctions suivantes (dans cet exercice, on ne se préoccupera pas des domaines de définition).

1. $f : x \mapsto \frac{x-3}{x+1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
2. $g : x \mapsto x^3\sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}^+$.

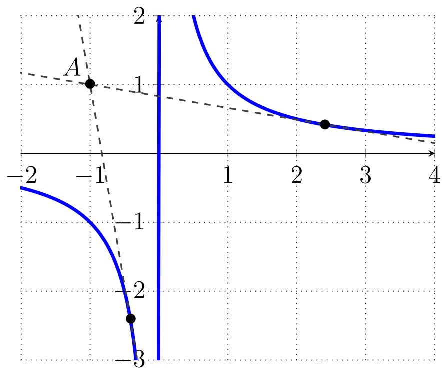
Exercice 3 (5 points)**.** *Dans cet exercice, toutes les distances sont données en mètres, les temps en secondes, et les vitesses en mètres par seconde.*
À cause de la résistance de l'air, une balle lachée depuis une grande hauteur atteint assez vite une vitesse limite. Dans le vide, la vitesse croît indéfiniment.

On se pose la question suivante : À quelle altitude faudrait-il lacher une balle, dans le vide, pour que sa vitesse dépasse celle du son ?
On admet que la profondeur d'une balle chutant dans le vide (par rapport à son altitude initiale), sur la Terre, est donnée par la fonction $z(t) = 4,905t^2$. Par exemple, $z(2) = 19,62$ signifie : « Au bout de deux secondes de chute, la balle a parcouru 19,62 m ».
On admet également que la vitesse de chute est donnée par la dérivée de l'altitude z : $v(t) = z'(t)$.
Enfin, la vitesse du son est environ 340 m/s.

1. Calculer l'expression de la vitesse $v(t)$ (égale à la dérivée de z).
2. En déduire que la balle atteint la vitesse du son au bout de 34,7 secondes environ.
3. Quelle est la hauteur nécessaire pour atteindre cette vitesse ?

Exercice 4 (8 points)**.**

On considère la courbe de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$, et le point $A(-1; 1)$.
On se pose la question suivante : Quelles sont les équations des tangentes à la courbe passant par le point A ?
Cette situation est illustrée par le dessin ci-contre (qui n'est qu'une *illustration* : aucun réponse par lecture graphique n'est acceptée).



Soit $M(a; \frac{1}{a})$ un point de la courbe par lequel passe une des tangente.

1. Montrer que l'équation de la tangente en M est $y = -\frac{1}{a^2}(x-a)+\frac{1}{a}$.
2. En déduire que puisque la tangente passe par le point A, alors on a : $a^2 - 2a - 1 = 0$.
3. Quelles sont les valeurs possibles pour a ?
4. Conclure : Quelles sont les coordonnées des points de la courbe dont la tangente passe par le point A ?