Quelque remarques sur des connaissances qui n'apparaissent pas dans ce devoir blanc, mais qui pourraient être nécessaires dans le devoir.

Remarque 1 : *Il est probable qu'il y aura d'autres calculs de dérivées qui nécessiteront de connaître les dérivées de toutes les fonctions usuelles, et des opérations sur les dérivées.*

Remarque 2 : *Il est probable qu'il y ait besoin de déterminer les racines d'un polynôme du second degré, voire de déterminer son signe.*

Exercice 1. *On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \frac{-2x+1}{x^2+1}$.*

1. *Montrer que $f'(x) = \frac{2x^2-2x-2}{(x^2+1)^2}$.*

   On pose $u(x) = -2x+1$ et $v(x) = x^2+1$. On a alors $u'(x) = -2$ et $v'(x) = 2x$, et donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x) \times v(x) - v'(x) \times u(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{-2 \times (x^2+1) - 2x \times (-2x+1)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-2x^2 - 2 + 4x^2 - 2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{2x^2 - 2x - 2}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

2. *Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 3.*

   L'équation de la tangente est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$, avec $a = 3$, et :

   - $f(3) = \frac{-2\times3+1}{3^2+1} = \frac{-5}{10} = -0,5$;
   - $f'(3) = \frac{2\times3^2-2\times3-2}{(3^2+1)^2} = \frac{10}{100} = 0,1$;

   L'équation de la tangente au point d'abscisse 3 est donc :

$$\begin{aligned}
y &= 0,1 \times (x-3) + (-0,5) \\
y &= 0,1x - 0,3 - 0,5 \\
y &= 0,1x - 0,8
\end{aligned}$$

3. *Existe-t-il un point de la courbe dont la tangente soit parallèle à l'axe des abscisses ?*

   Pour que la tangente soit parallèle à l'axe des abscisses, il faut que son coefficient directeur soit 0, c'est-à-dire que $f'(x) = 0$. Résolvons cette équation.

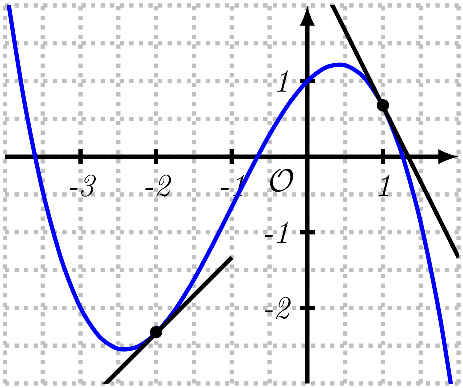
$$\begin{aligned}
f'(x) &= 0 \\
\frac{2x^2 - 2x - 2}{\left(x^2+1\right)^2} &= 0 \\
2x^2 - 2x - 2 &= 0
\end{aligned}$$

   C'est un trinôme du second degré, de discriminant $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 20$. Le discriminant est positif, donc il y a deux solutions.

   Il est donc possible que la tangente à la courbe soit parallèle à l'axe des abscisses.

   Remarque : La question ne demandait pas en quelles abscisses *la tangente est parallèles, donc nous n'avons pas besoin de déterminer les solutions. Tout ce que nous avons à dire, c'est qu'il existe des solutions.*

Exercice 2. *On considère la fonction f, dont voici la représentation graphique.*



1. *Donner une valeur approchée des nombres suivants, par lecture graphique :*

   (a) $f(-2) \approx -2,5$

   (b) $f'(-2) \approx 1$ (coefficient directeur de la tangente).

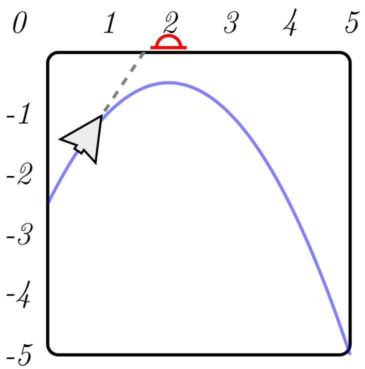
   (c) $f(1) \approx 1,2$

   (d) $f'(1) \approx -2$ (coefficient directeur de la tangente).

   .

2. *Donner un nombre x tel que $f'(x) = 0$.* Il y a deux solutions : $x \approx -2,5$ et $x \approx 1$ (là où la tangente à la courbe est horizontale).

Exercice 3. *La figure ci-dessous représente un écran de jeu vidéo. Un avion parcourt l'écran de gauche à droite en suivant la courbe de la fonction définie sur $[0;5]$ par $f : x \mapsto -\frac{x^2}{2} + 2x - 2,5$.*
L'avion peut tirer des missiles selon la tangente à sa trajectoire (qui se trouve donc être la tangente à la courbe de f).



Un joueur tire un missile lorsque $x = 0,8$. On souhaite savoir s'il a réussi à abattre le monstre situé en haut de l'écran en $A\binom{2}{0}$.

1. *Déterminer l'expression de $f'(x)$.* La fonction f est un polynôme, donc : $f'(x) = -\frac{2x}{2} + 2 = -x + 2$.
2. *En déduire que l'équation de la tangente à la courbe de f en $0,8$ est $y = 1,2x - 2,18$.* L'équation de la tangente est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$, avec $a = 0,8$, $f(a) = f(0,8) = -1,22$ et $f'(a) = f'(0,8) = 1,2$. Donc l'équation est :

$$\begin{aligned} y &= 1,2(x - 0,8) - 1,22 \\ y &= 1,2x - 1,2 \times 0,8 - 1,22 \\ y &= 1,2x - 2,18 \end{aligned}$$

3. *Déterminer le point d'intersection de la tangente avec l'axe des abscisses, et en déduire si le joueur a réussi à atteindre le monstre.* Le point d'intersection de la tangente avec l'axe des abscisses a pour ordonnée $y = 0$. Il faut donc résoudre l'équation $0 = 1,2x - 2,18$, ce qui donne $x = \frac{2,18}{1,2} \approx 1,8$. Le point d'intersection a donc pour coordonnées environ $(1,8;0)$: le monstre (en $(2;0)$) est donc manqué.