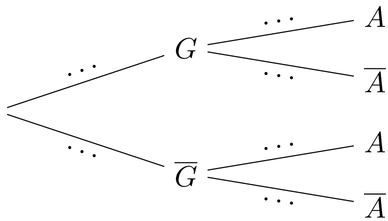
14/02/20
DM n^o 5

Probabilités
Produit scalaire

1^e

Exercice 1 (Probabilités — d'après Baccalauréat STMG Polynésie 2014)**.**
Dans un petit village, la mairie a organisé une fête locale : un certain nombre d'entrées gratuites ont été distribuées aux habitants et des stands ont été installés pour la vente de produits locaux.
Les organisateurs estiment que 40 % des visiteurs de la fête ont eu une entrée gratuite, les autres ont payé leur entrée.
De plus, parmi les visiteurs ayant une entrée gratuite, 45 % ont effectué un achat dans un des stands. Parmi ceux ayant payé leur entrée, 60 % n'ont rien acheté.
On interroge au hasard un des visiteurs de la fête à la fin de la journée.
On note
G l'évènement : « le visiteur a eu une entrée gratuite »,
A l'évènement : « le visiteur a effectué un achat ».
On notera $\overline{G}$ l'évènement contraire de G et $\overline{A}$ l'évènement contraire de A.

1. Donner la valeur de la probabilité $P_G(A)$.
2. Recopier et compléter sur votre copie l'arbre de probabilité ci-dessous



3. Calculer la probabilité de l'évènement suivant : « le visiteur a payé son entrée et a effectué un achat ».
4. Montrer que la probabilité que le visiteur ait effectué un achat est 0,42.
5. Calculer la probabilité que le visiteur ait payé son entrée sachant qu'il a effectué un achat.

   On arrondira à $0,01$ *près le résultat.*

Exercice 2 (Orthocentre)**.**

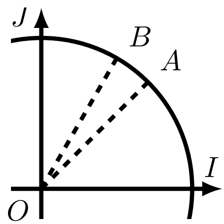
1. Soient A, B, C trois points du plan. Montrer que pour tout point M, on a :
$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB}=0$$
Indice : Utiliser les décompositions $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}$.

Soit ABC un triangle, et H le point d'intersection des hauteurs issues de A et B. En appliquant l'égalité précédente au point H, on obtient :
$$\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB}=0$$

2. Justifier que $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC}=0$ et $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA}=0$.
3. Simplifier l'expression $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB}=0$, puis en déduire que (AB) et (HC) sont perpendiculaires.
4. En déduire que les trois hauteurs d'un triangle sont concourrantes.

Exercice 3 (Valeurs remarquables)**.** Le but de l'exercice est de calculer la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$.

On considère le cercle trigonométrique, et on se place dans le repère orthonormé (O,I,J). On considère les points A et B, tels que $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}\right)=\frac{\pi}{4}$ et $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}\right)=\frac{\pi}{3}$.



1. (a) Rappeler les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{4}$, $\sin\frac{\pi}{4}$, $\cos\frac{\pi}{3}$, et $\sin\frac{\pi}{3}$.
   (b) Déterminer les coordonnées de A et B, puis des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.
   (c) En utilisant l'expression algébrique du produit scalaire (celle qui utilise les coordonnées des vecteurs), montrer que $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}$.
2. (a) Justifier que $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)=\frac{\pi}{12}$.
   (b) Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ en fonction de $\cos\frac{\pi}{12}$.
3. En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$.

Exercice 4 (Culture)**.** Donner un exemple de progrès mathématique (nouveau théorème, nouvelle conjecture, nouveau problème ouvert, etc.) réalisé *après* votre naissance.