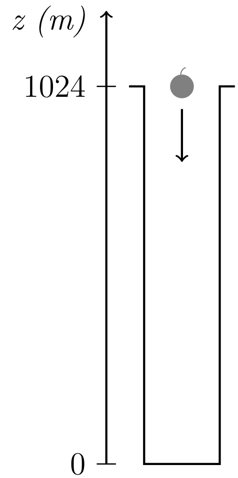
DÉRIVATION

Exercice 1 (Application à la physique)**.**

Remarque : Si cette méthode fonctionne en théorie *pour déterminer la valeur de g, elle est très peu précise, et il a toujours existé d'autres manières plus précises pour déterminer g.*

Isaac voudrait déterminer la valeur de g, intensité de la pesanteur, chez lui. Pour cela, il lâche une pomme du haut du puits d'une mine à Pendleton (Grande-Bretagne), haut de 1 024 m, et chronomètre son temps de chute. L'altitude de la pomme est mesurée à partir du fond du puits : elle est de 0 m au fond, et 1 024 m en haut.



Isaac sait que cette altitude en fonction du temps est un polynôme de la forme $z : t \mapsto at^2 + bt + c$, où t est le temps de chute. Par exemple, $z(0)$ est l'altitude initiale, et $z(3)$ est l'altitude après trois secondes de chute. Le but de l'exercice est de déterminer les valeurs de a, b et c, pour en déduire la valeur de l'intensité de la pesanteur g.

(1) Combien vaut l'altitude initiale $z(0)$? En déduire que $c = 1024$.

(2) La vitesse v de la chute est égale à la dérivée de la fonction z. Par exemple, $v(2) = z'(2)$ est la vitesse de la pomme après deux secondes de chute.

  (a) Dériver z, et en déduire l'expression de v en fonction de a et b.

  (b) Quelle est la vitesse initiale ? En déduire que $b = 0$.

  (c) Exprimer z et v en fonction de a et t.

(3) Isaac, aidé de Gottfried, a mesuré que la chute a duré 14,5 s. Traduire cette information par une équation, et montrer que $a = -4,87$.

(4) Calculer la dérivée de v ; c'est une constante égale à $-g$. Conclure en déterminant la valeur de g. *Bonus (optionnel) : Quelle est l'unité de g ?*

Exercice 2 (Calcul de fonction dérivées)**.**
Répondre à deux des trois questions suivantes (1, 2 et 3), classées par ordre de difficulté croissante. La méthode à appliquer est celle utilisée dans le cours, pour démontrer que la dérivée de la fonction carré est la fonction $x \mapsto 2x$.
Ne faites la question (c) que pour une des questions, au choix.
Le but de ces questions est de démontrer (partiellement) la propriété donnant les dérivées des fonctions usuelles. Il faut donc faire comme si vous ne connaissiez pas cette propriété : elle ne doit pas être utilisée.

1. On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 - 3x + 1$, définie sur $\mathbb{R}$, et a un réel.
   (a) Montrer que pour un réel h non nul, le taux d'accroissement en a est égal à $2a + h - 3$.
   (b) En déduire la valeur de $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (en fonction de a), et donc la valeur de $f'(a)$.
   (c) *Application :* Calculer $f'(2)$, et tracer dans un repère orthonormé la courbe de f (sur l'intervalle $[0; 4]$), ainsi que sa tangente en 2.
2. On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$, définie sur $\mathbb{R}^*$, et a un réel non nul.
   (a) Montrer que pour un réel h non nul (et tel que $a + h \neq 0$), le taux d'accroissement en a est égal à $-\frac{1}{a(a+h)}$.
   (b) Même énoncé que la question 1b.
   (c) Même énoncé que la question 1c.
3. On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$, définie sur $\mathbb{R}^+$, et a un réel strictement positif.
   (a) Montrer que pour un réel h non nul (et tel que $a + h \geqslant 0$), le taux d'accroissement en a est égal à $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+h}}$.
   (b) Même énoncé que la question 1b.
   (c) Même énoncé que la question 1c.

Exercice 3 (Culture générale)**.** Citer une mathématicienne, et dire en deux ou trois phrases pourquoi elle est connue.