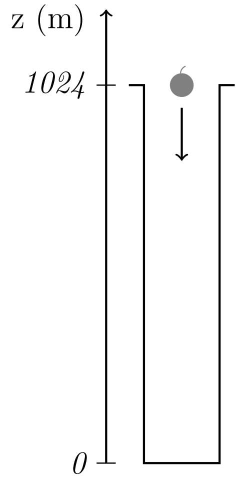
Exercice 1. *Isaac voudrait déterminer la valeur de g, intensité de la pesanteur, chez lui. Pour cela, il lâche une pomme du haut du puits d'une mine à Pendleton (Grande-Bretagne), haut de $1\,024\,\mathrm{m}$, et chronomètre son temps de chute.*



L'altitude de la pomme est mesurée à partir du fond du puits : elle est de $0\,\mathrm{m}$ au fond, et $1\,024\,\mathrm{m}$ en haut.

Isaac sait que cette altitude en fonction du temps est un polynôme de la forme $z : t \mapsto at^2 + bt + c$, où t est le temps de chute. Par exemple, $z(0)$ est l'altitude initiale, et $z(3)$ est l'altitude après trois secondes de chute. Le but de l'exercice est de déterminer les valeurs de a, b et c, pour en déduire la valeur de l'intensité de la pesanteur g.

(1) *Combien vaut l'altitude initiale $z(0)$? En déduire que $c = 1024$.* Au départ, la pomme est au sommet du puit, donc $z(0) = 1024$. En utilisant l'expression de z, on trouve que $z(0) = a \times 0^2 + b \times 0 + c = c$. Donc $c = 1024$.

(2) *La vitesse v de la chute est égale à la dérivée de la fonction z. Par exemple, $v(2) = z'(2)$ est la vitesse de la pomme après deux secondes de chute.*

  (a) *Dériver z, et en déduire l'expression de v en fonction de a et b.* Puisque z est un polynôme, on a : $z'(t) = 2at + b$. Donc $v(t) = z'(t) = 2at + b$.

  (b) *Quelle est la vitesse initiale ? En déduire que $b = 0$.* La pomme est lâchée du sommet, donc $v(0) = 0$. Or $v(0) = 2a \times 0 + b = b$. Donc $b = 0$.

(c) *Exprimer z et v en fonction de a et t.* Donc :

$$v(t) = 2at$$
$$z(t) = at^2 + 1024$$

(3) *Isaac, aidé de Gottfried, a mesuré que la chute a duré 14,5*s. *Traduire cette information par une équation, et montrer que $a = -4,87$.* La chute s'arrête lorsque la pomme atteint le fond du puits, c'est-à-dire quand $z(t) = 0$. Donc, $z(14,5) = 0$, et $a \times 14,5^2 + 1024 = 0$. Donc $a = -\frac{1024}{14,5^2} \approx -4,87$.

(4) *Calculer la dérivée de v ; c'est une constante égale à $-g$. Conclure en déterminant la valeur de g.* La dérivée de v est $v'(t) = 2a \approx 2 \times (-4,87) \approx -9,74$. Donc $-g \approx -9,74$, et $g = 9,74$.
Bonus : La constante g calculée est l'intensité de la pesanteur, dont l'unité est $N.kg^{-1}$ ou $m.s^{-2}$.

Exercice 2 (Calcul de fonction dérivées)**.**

1. *On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 - 3x + 1$, définie sur $\mathbb{R}$, et a un réel.*

(a) *Montrer que pour un réel h non nul, le taux d'accroissement en a est égal à $2a + h - 3$.* Calculons le taux d'accroissement :

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{(a+h)^2 - 3 \times (a+h) + 1 - (a^2 - 3a + 1)}{h} \\ &= \frac{a^2 + 2ah + h^2 - 3a - 3h + 1 - a^2 + 3a - 1}{h} \\ &= \frac{2ah + h^2 - 3h}{h} \\ &= \frac{h(2a + h - 3)}{h} \\ &= 2a + h - 3\end{aligned}$$

(b) *En déduire la valeur de $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (en fonction de a), et donc la valeur de $f'(a)$.* Lorsque h tend vers 0, le taux d'accroissement $2a + h - 3$ tend vers $2a - 3$. Donc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 2a - 3$. Nous avons montré que $f'(a) = 2a - 3$.

(c) Application : *Calculer $f'(2)$, et tracer dans un repère orthonormé la courbe de f (sur l'intervalle $[0; 4]$), ainsi que sa tangente en 2.* Le nombre dérivé de f en 2 est $f'(2) = 2 \times 2 - 3 = 1$. Voir le graphique à la fin.

2. *On considère la fonction* $f : x \mapsto \frac{1}{x}$*, définie sur* $\mathbb{R}^*$*, et* a *un réel non nul.*

   (a) *Montrer que pour un réel* h *non nul (et tel que* $a+h \neq 0$*), le taux d'accroissement en* a *est égal à* $-\frac{1}{a(a+h)}$*.*

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h}\\ &= \frac{\frac{a}{a(a+h)}-\frac{a+h}{a(a+h)}}{h}\\ &= \frac{\frac{a-a-h}{a(a+h)}}{h}\\ &= \frac{-h}{a\left(a+h\right)}\times\frac{1}{h}\\ &= -\frac{1}{a\left(a+h\right)}\end{aligned}$$

   (b) *Même énoncé que la question 1b.* Lorsque h tend vers 0, $a+h$ tend vers a, donc $-\frac{1}{a(a+h)}$ tend vers $-\frac{1}{a^2}$. Donc $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$.

   (c) *Même énoncé que la question 1c.* Le nombre dérivé de f en 2 est : $f'(2) = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4}$. Voir le graphique à la fin.

3. *On considère la fonction* $f : x \mapsto \sqrt{x}$*, définie sur* $\mathbb{R}^+$*, et* a *un réel strictement positif.*

   (a) *Montrer que pour un réel* h *non nul (et tel que* $a+h \geqslant 0$*), le taux d'accroissement en* a *est égal à* $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+h}}$*.* Calculons le taux d'accroissement :

$$\begin{aligned}\frac{f\left(a+h\right)-f\left(a\right)}{h} &= \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}\\ &= \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}\times\frac{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}\\ &= \frac{\sqrt{a+h}^2-\sqrt{a}^2}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)}\\ &= \frac{h}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}\end{aligned}$$

(b) *Même énoncé que la question 1b.* Lorsque h tend vers 0, $\sqrt{a+h}$ tend vers $\sqrt{a}$, donc le taux d'accroissement tend vers $\frac{1}{2\sqrt{a}}$. Donc $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$.

(c) *Même énoncé que la question 1c.* Le nombre dérivé de f en 2 vaut : $f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0,35$. Voir le graphique ci-dessous.