Exercice 1. *Une personne dépose 100€ dans une banque, dans laquelle on lui propose les deux comptes suivants :*

(A) l'argent placé rapporte 5% d'intérêts simples par an (c'est-à-dire que seul l'argent placé au départ rapporte des intérêts) ;

(B) l'argent placé rapporte 3% d'intérêts composés par an (c'est-à-dire que les intérêts d'une année rapportent eux même des intérêts l'année suivante).

1. *Donner, dans les deux cas, la somme d'argent présente sur le compte les trois premières années.*

   Avec le compte A, l'argent placé rapporte chaque année 5% de la somme initiale, soit 5€. Il y aura donc la première année 100€ (la somme initiale), 105€ la seconde année, 110€ la troisième année.

   Avec le compte B, l'argent rapporte chaque année 3% de la somme. Il y aura donc 100€ la première année, $100 + \frac{3}{100} \times 100 = 103$ la seconde année, et $103 + \frac{1}{3} \times 103 = 106,09$ la troisième année.

2. Étude du compte A. *On appelle a la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : a_n est la somme d'argent présente sur le compte au bout de n années (a_0 étant la somme initiale).*

   (a) *Donner les valeurs de a_0, a_1, a_2.* D'après les calculs de la première question, on a : $a_0 = 100$, $a_1 = 105$, $a_2 = 110$.

   (b) *Montrer que a est une suite arithmétique de premier terme* 100 *et de raison 5.* Comme expliqué précédement, l'argent placé rapporte 5€ par an. Donc la somme sur le compte augmente de 5€ par an, ce qui correspond à une suite arithmétique de premier terme $a_0 = 100$ et de raison 5.

   (c) *Donner le terme général de la suite a.* Puisque a est arithmétique, alors $a_n = 100 + 5n$.

   (d) *Combien d'argent sera présent sur le compte au bout de 20 ans ?* Au bout de 20 ans, il y aura sur le compte $a_{20} = 100 + 5 \times 20 = 200$ euros.

3. Étude du compte B. *On appelle b la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : b_n est la somme d'argent présente sur le compte au bout de n années (b_0 étant la somme initiale).*

   (a) *Donner les valeurs de b_0, b_1, b_2.* D'après les calculs de la première question, on a : $b_0 = 100$, $b_1 = 103$, $b_2 = 106,09$.

(b) *Montrer que b est une suite géométrique de premier terme* 100 *et de raison* $1,03$. Chaque année, l'argent placé rapporte 3% d'intérêts. Soit b_n l'argent présent sur le compte l'année n. Alors l'année suivante, il y aura $b_{n+1} = b_n + 3\%b_n = b_n(1+3\%) = 1,03b_n$. La suite b est donc géométrique de premier terme $b_0 = 100$ et de raison $1,03$.

(c) *Donner le terme général de la suite b.* La suite étant géométrique, alors $b_n = 100 \times 1,03^n$.

(d) *Combien d'argent sera présent sur le compte au bout de 20 ans ?* Il y aura au bout de vingt ans $b_{20} = 100 \times 1,03^{20} \approx 180,61$ euros.

4. *À l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de combien d'années le compte B sera plus intéressant que le compte A.* On observe que $a_{32} = 260$ et $b_{32} \approx 257,51$, alors que $a_{33} = 265$ et $b_{33} \approx 265,23$. Donc à partir de la 33e année, il y a plus d'argent avec le compte B qu'avec le compte A.

Exercice 2 (Problème ouvert)**.** On appelle u la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : *u_n est le nombre de cubes de l'étage n (en partant du haut).* C'est une suite arithmétique de premier terme[1] $u_1 = 1$ et de raison 2. Donc pour n'importe quel nombre n, on a $u_n = 1 + 2(n-1) = 1 + 2n - 2 = 2n - 1$.

Une pyramide de n étage contiendra donc $u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ cubes. Puisque la petite fille dispose de 1729 cubes, alors on a :

$$\begin{aligned}
u_1 + u_2 + \cdots + u_n &\leqslant 1729 \\
n \times \frac{u_1 + u_n}{2} &\leqslant 1729 \\
n \times \frac{1 + 2n - 1}{2} &\leqslant 1729 \\
n \times \frac{2n}{2} &\leqslant 1729 \\
n^2 &\leqslant 1729 \\
n &\leqslant \sqrt{1729} \text{ car } n \text{ est un nombre positif.}
\end{aligned}$$

Donc, puisque $\sqrt{1729} \approx 41,6$, la plus grande valeur que peut prendre n est 41. La pyramide aura donc 41 étages.

Le nombre de cubes utilisés sera alors $41 \times \frac{u_1 + u_{41}}{2} = 41 \times \frac{1 + 2 \times 41 - 1}{2} = 1681$, et il restera $1729 - 1681 = 48$ cubes inutilisés.

1. Remarque : On aurait tout aussi bien pu prendre comme premier terme u_0 (et non pas u_1), mais cela aurait induit un décalage entre lu numéro de l'étage et l'indice du terme de la suite (le nombre de termes du 7e étage aurait alors été u_6 et non pas u_7, par exemple).