

**Exercice 1.** Une personne dépose 100€ dans une banque, dans laquelle on lui propose les deux comptes suivants :

- (A) l'argent placé rapporte 5% d'intérêts simples par an (c'est-à-dire que seul l'argent placé au départ rapporte des intérêts) ;
- (B) l'argent placé rapporte 3% d'intérêts composés par an (c'est-à-dire que les intérêts d'une année rapportent eux même des intérêts l'année suivante).

1. Donner, dans les deux cas, la somme d'argent présente sur le compte les trois premières années.

Avec le compte A, l'argent placé rapporte chaque année 5% de la somme initiale, soit 5€. Il y aura donc la première année 100€ (la somme initiale), 105€ la seconde année, 110€ la troisième année.

Avec le compte B, l'argent rapporte chaque année 3% de la somme. Il y aura donc 100€ la première année,  $100 + \frac{3}{100} \times 100 = 103$  la seconde année, et  $103 + \frac{1}{3} \times 103 = 106,09$  la troisième année.

2. Étude du compte A. On appelle  $a$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $a_n$  est la somme d'argent présente sur le compte au bout de  $n$  années ( $a_0$  étant la somme initiale).

(a) Donner les valeurs de  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ . D'après les calculs de la première question, on a :  $a_0 = 100$ ,  $a_1 = 105$ ,  $a_2 = 110$ .

(b) Montrer que  $a$  est une suite arithmétique de premier terme 100 et de raison 5. Comme expliqué précédemment, l'argent placé rapporte 5€ par an. Donc la somme sur le compte augmente de 5€ par an, ce qui correspond à une suite arithmétique de premier terme  $a_0 = 100$  et de raison 5.

(c) Donner le terme général de la suite  $a$ . Puisque  $a$  est arithmétique, alors  $a_n = 100 + 5n$ .

(d) Combien d'argent sera présent sur le compte au bout de 20 ans ? Au bout de 20 ans, il y aura sur le compte  $a_{20} = 100 + 5 \times 20 = 200$  euros.

3. Étude du compte B. On appelle  $b$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $b_n$  est la somme d'argent présente sur le compte au bout de  $n$  années ( $b_0$  étant la somme initiale).

(a) Donner les valeurs de  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ . D'après les calculs de la première question, on a :  $b_0 = 100$ ,  $b_1 = 103$ ,  $b_2 = 106,09$ .

- (b) *Montrer que  $b$  est une suite géométrique de premier terme 100 et de raison 1,03.* Chaque année, l'argent placé rapporte 3% d'intérêts. Soit  $b_n$  l'argent présent sur le compte l'année  $n$ . Alors l'année suivante, il y aura  $b_{n+1} = b_n + 3\%b_n = b_n(1 + 3\%) = 1,03b_n$ . La suite  $b$  est donc géométrique de premier terme  $b_0 = 100$  et de raison 1,03.
- (c) *Donner le terme général de la suite  $b$ .* La suite étant géométrique, alors  $b_n = 100 \times 1,03^n$ .
- (d) *Combien d'argent sera présent sur le compte au bout de 20 ans ? Il y aura au bout de vingt ans  $b_{20} = 100 \times 1,03^{20} \approx 180,61$  euros.*
4. *À l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de combien d'années le compte B sera plus intéressant que le compte A.* On observe que  $a_{32} = 260$  et  $b_{32} \approx 257,51$ , alors que  $a_{33} = 265$  et  $b_{33} \approx 265,23$ . Donc à partir de la 33<sup>e</sup> année, il y a plus d'argent avec le compte B qu'avec le compte A.

**Exercice 2** (Problème ouvert). On appelle  $u$  la suite définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :  $u_n$  est le nombre de cubes de l'étage  $n$  (en partant du haut). C'est une suite arithmétique de premier terme<sup>1</sup>  $u_1 = 1$  et de raison 2. Donc pour n'importe quel nombre  $n$ , on a  $u_n = 1 + 2(n - 1) = 1 + 2n - 2 = 2n - 1$ . Une pyramide de  $n$  étage contiendra donc  $u_1 + u_2 + \dots + u_n$  cubes. Puisque la petite fille dispose de 1729 cubes, alors on a :

$$\begin{aligned}
 u_1 + u_2 + \dots + u_n &\leq 1729 \\
 n \times \frac{u_1 + u_n}{2} &\leq 1729 \\
 n \times \frac{1 + 2n - 1}{2} &\leq 1729 \\
 n \times \frac{2n}{2} &\leq 1729 \\
 n^2 &\leq 1729 \\
 n &\leq \sqrt{1729} \text{ car } n \text{ est un nombre positif.}
 \end{aligned}$$

Donc, puisque  $\sqrt{1729} \approx 41,6$ , la plus grande valeur que peut prendre  $n$  est 41. La pyramide aura donc 41 étages.

Le nombre de cubes utilisés sera alors  $41 \times \frac{u_1 + u_{41}}{2} = 41 \times \frac{1 + 2 \times 41 - 1}{2} = 1681$ , et il restera  $1729 - 1681 = 48$  cubes inutilisés.

---

1. Remarque : On aurait tout aussi bien pu prendre comme premier terme  $u_0$  (et non pas  $u_1$ ), mais cela aurait induit un décalage entre le numéro de l'étage et l'indice du terme de la suite (le nombre de termes du 7<sup>e</sup> étage aurait alors été  $u_6$  et non pas  $u_7$ , par exemple).