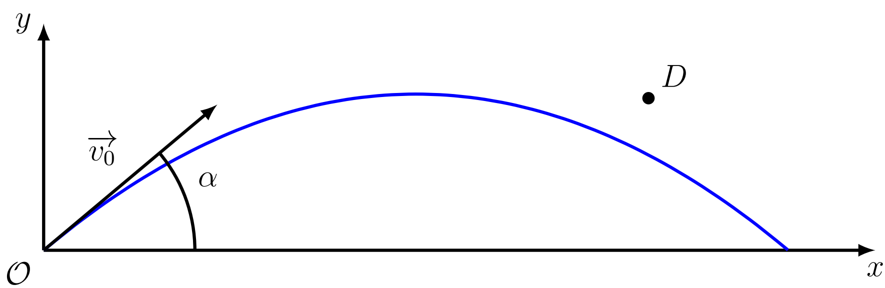
16/10 *DM n° 1*	**ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ**	*1*^{e}

Faire un des deux exercices 1 et 2 (l'exercice 1 est plus compliqué). L'exercice 3 est obligatoire.

Exercice 1 (Balistique)**.** Sabrina a fabriqué un lanceur de ballon. Elle aimerait filmer sa création avec son drone, pour publier la vidéo sur internet. Le problème qu'elle se pose est : où doit-être positionné le drone pour être certaine que le ballon ne le heurte pas ?
Le problème est shématisé, en deux dimensions, ci-dessous :

- le lanceur est positionné en $\mathcal{O}$;
- le ballon est propulsé au départ selon le vecteur vitesse $\overrightarrow{v_0}$, formant un angle α avec l'horizontale ;
- la parabole représente la trajectoire du ballon, de gauche à droite ;
- le drone filme depuis le point D.



En faisant certaines approximations (négligence du vent par exemple), elle a calculé que dans un certain repère orthonormé, le ballon suit une trajectoire donnée par la formule :

$$y = -\left(1 + \tan^2 \alpha\right) x^2 + x \tan \alpha$$

1. Montrer que l'équation de la trajectoire est équivalente à

$$x^2 \tan^2 \alpha - x \tan \alpha + x^2 + y = 0$$

2. *Cas particuliers*
   (a) i. Trouver les valeurs de A qui vérifient

   $$(0,2)^2 A^2 - 0,2A + (0,2)^2 + 0,1 = 0$$

   ii. En déduire les valeurs approchées de α qui vérifient

   $$(0,2)^2 \tan^2 \alpha - 0,2 \tan \alpha + (0,2)^2 + 0,1 = 0$$

   iii. Sans nouveau calcul, déterminer si le drone, positionné en $B(0,2;0,1)$, peut être atteint par le ballon.

   (b) En utilisant la même méthode, déterminer si le drone, positionné en $C(0,25;0,20)$, peut être atteint par le ballon.

3. *Cas général* Dans cette question, on cherche à déterminer la limite à ne pas franchir par le drone pour rester hors de portée du ballon.
   On note $(x_D; y_D)$ les coordonnées du drone.
   (a) En vous servant de la question 1, justifier que le ballon peut atteindre le drone si et seulement si l'équation $x_D^2 A^2 - x_D A + x_D^2 + y_D = 0$, d'inconnue $A = \tan \alpha$, a une solution.
   (b) Montrer que le discriminant de cette équation est

   $$\Delta = x_D^2 \left(1 - 4\left(x_D^2 + y\right)\right)$$

   Si ce discriminant est strictement négatif, l'équation n'a pas de solutions, et le drone est en sécurité. Si le discriminant est strictement positif, l'équation a deux solutions, et le drone est en danger. Si le discriminant est nul, l'équation a une solution : c'est la limite à ne pas dépasser par le drone pour rester en sécurité.

(c) Montrer que, en ignorant le cas où $x_D = 0$, le discriminant Δ est nul si et seulement si $y_D = \frac{1}{4} - x_D^2$. Quel est le nom de la courbe décrite par cette équation ?

4. *Application* Le drone est maintenant placé en $(0,1; 0,2)$. En utilisant l'équation de la parabole de sécurité (dont l'équation a été énoncée à la question 3c), déterminer si le drone peut être atteint par le ballon.

Exercice 2. On se place dans un repère orthonormé.
On considère la parabole $\mathcal{P}$, courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto x^2 - x - 1$. D'autre part, on définit la droite d par $y = mx - 2m$ (où m est un nombre réel). L'objet de l'exercice est de déterminer le nombre de points d'intersection entre la droite et la parabole en fonction des valeurs de m.
Soit $M(x, y)$ un point d'intersection de la parabole $\mathcal{P}$ et de la droite d.

1. Justifier que $x^2 - (1 + m)x + 2m - 1 = 0$.
2. Montrer que le discriminant de ce trinôme est $\Delta = m^2 - 6m + 5$.

Ce discriminant est en fait un trinôme du second degré, d'inconnue m.

3. Déterminer les racines du trinôme Δ, puis dresser son tableau de signes.
4. *Conclusion :* Déterminer le nombre de points d'intersections entre la parabole $\mathcal{P}$ et la droite d en fonction des valeurs de m (aucun nouveau calcul à faire pour cette section : il suffit de lire le tableau de signes de la question précédente en justifiant un peu).
5. *Pour aller plus loin :* Dans le cas où $\Delta = 0$, quelle est alors la position relative de la droite et la parabole ?

Exercice 3 (Culture générale)**.** Citer un mathématicien, et dire en deux ou trois phrases pourquoi il est connu.