Mathématiques — Première — Spécialité mathématiques

2024 — 2025

Table des matières

$e^{i\pi} + 1$

Chapitre 0

Algorithmique

TODO

0^0

Chapitre 1

Fonctions de référence

1 Variations

Définition 1. Dans le plan muni d'un repère, la courbe représentative d'une fonction f est l'ensemble des points $(x; f(x))$ pour tout x de l'ensemble de définition de f.

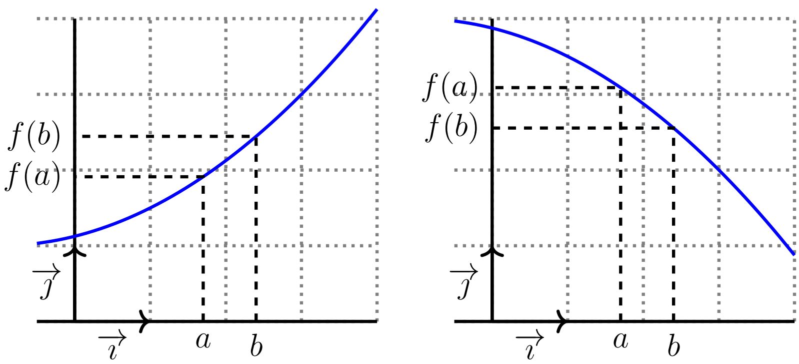
Définition 2. Soit une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ (où $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$).

— On dit que f est *croissante* (respectivement *strictement croissante*) si quels que soient a et b dans $\mathcal{D}$, si $a < b$, alors $f(a) \leqslant f(b)$ (respectivement $f(a) < f(b)$). On dit aussi que « la fonction f conserve l'ordre ».

— On dit que f est *décroissante* (respectivement *strictement décroissante*) si quels que soient a et b dans $\mathcal{D}$, si $a < b$, alors $f(a) \geqslant f(b)$ (respectivement $f(a) > f(b)$). On dit aussi que « la fonction f inverse l'ordre ».

— On dit que f est *constante* si quels que soient a et b dans $\mathcal{D}$, alors $f(a) = f(b)$.

— On dit qu'une fonction est *monotone* (respectivement *strictement monotone*) si elle est croissante ou décroissante (respectivement strictement croissante ou décroissante).



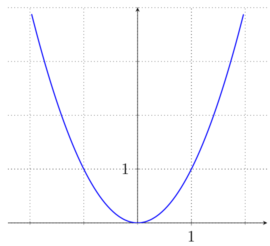
2 Bestiaire

2.1 Fonction carré

Définition 3. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est appelée *fonction carré.*

Propriété 4 (Variations)**.** Le tableau de variations de la fonction carré est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		$\searrow$	0	$\nearrow$	

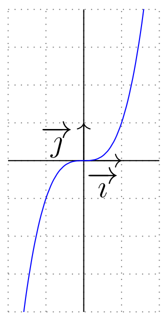


2.2 Fonction cube

Définition 5. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ est appelée *fonction cube.*

Propriété 6 (Variations)**.** Le tableau de variations de la fonction cube est :

x	$-\infty$		$+\infty$
x^3		$\nearrow$	

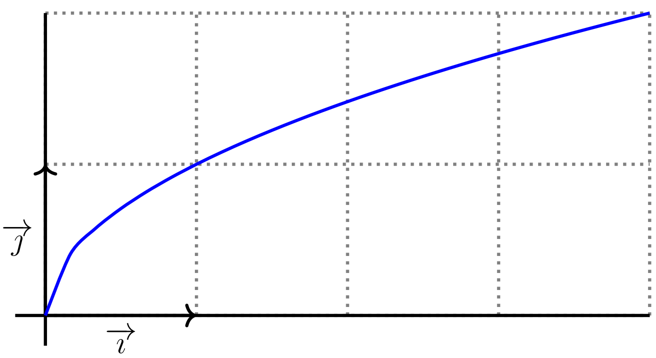


2.3 Fonction racine carrée

Définition 7.

— Étant donné un nombre réel positif a, sa racine carrée $\sqrt{a}$ désigne l'unique nombre positif dont le carré est a.

— La fonction racine carrée est la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ qui a chaque réel positif x associe sa racine carrée $\sqrt{x}$.



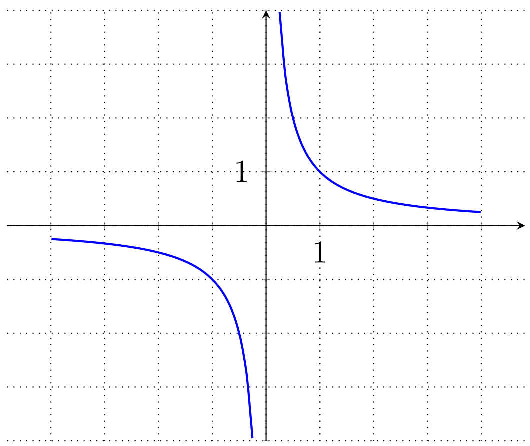
Propriété 8. La fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

2.4 Fonction inverse

Définition 9. La fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ est appelée *fonction inverse*.

Propriété 10 (Variations)**.** Le tableau de variations de la fonction inverse est :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	↘	‖	↘



2.5 Fonction valeur absolue

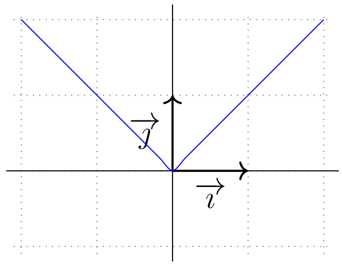
Définition 11. La *valeur absolue* d'un nombre réel x, noté, $|x|$, est égale à

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Définition 12. La *fonction valeur absolue* est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui a tout x associe sa valeur absolue $|x|$.

Propriété 13. Les variations de la fonction valeur absolue sont :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\lvert x\rvert$	↘	0	↗



3 Polynômes du second degré

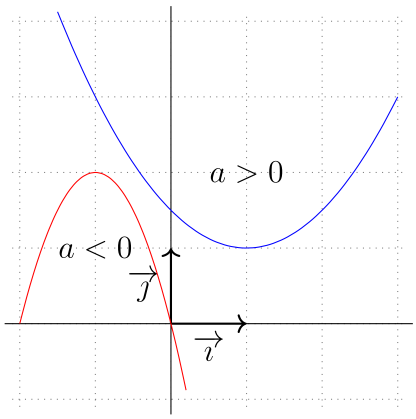
Définition 14 (Fonction polynôme du second degré)**.** Toute fonction f pouvant s'écrire sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) est appelée fonction polynôme du second degré.

Dans la suite du chapitre, f est un polynôme du second degré défini par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

3.1 Représentation graphique

Propriété 15 (Symétrie)**.** La courbe représentative d'un polynôme du second degré admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$.

Propriété 16 (Représentation graphique)**.** La courbe représentative d'un polynôme du second degré est une parabole.



Définition 17. On appelle *sommet* le point qui correspond à l'extremum de la fonction. Il est situé sur l'axe de symétrie de la parabole, donc son abscisse est $-\frac{b}{2a}$.

3.2 Formes d'un polynôme du second degré

Définition 18. On appelle *racines* d'un polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Définition 19 (Utilité des différentes formes)**.**

— Forme factorisée : $a(x - x_1)(x - x_2)$ avec $a \neq 0$, et éventuellement $x_1 = x_2$.
  — Met en valeur les racines.
  — Cette forme n'existe pas toujours.

— Forme canonique : $a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $a \neq 0$.
  — Met en valeur l'extremum et l'abscisse à laquelle il est atteint.
  — Existe toujours.

— Forme développée : $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$
  — Forme « par défaut ».
  — Utile pour calculer des images.

Propriété 20. Soit un trinôme, et a, b, c, α, β, x_1, x_2 les paramètres des différentes formes décrits dans la définition précédente. Alors :

- $\alpha = -\frac{b}{2a}$
- $\beta = f(\alpha)$
- $\frac{x_1 + x_2}{2} = \alpha$
- $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

3.3 Variations

Propriété 21 (Variations d'un polynôme du second degré)**.** Les variations d'un polynôme du second degré sont les suivantes.

- Si $a > 0$:

x	$-\infty$ $\quad -\frac{b}{2a} \quad$ $+\infty$
$ax^2 + bx + c$	$\searrow$ $\nearrow$

- Si $a < 0$

x	$-\infty$ $\quad -\frac{b}{2a} \quad$ $+\infty$
$ax^2 + bx + c$	$\nearrow$ $\searrow$

Chapitre 6

Suites numériques

1 Premières définitions

Définition 22. Une *suite* est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$) qui à tout entier n (appelé *rang*) de son domaine de définition associe le réel u_n, appelé *terme de la suite*.

Remarque 23. Une définition non formelle est : une suite est une liste infinie de nombres réels, numérotés.

Remarque 24. Une suite peut être définie (entre autres) :

— par récurrence en donnant le(s) premier(s) terme(s) et une formule permettant de calculer les suivants ;

— avec une formule explicite, donnant directement le terme de rang n.

Exemple 25.

— Soit la suite u définie par : $u_n = 3 \times 2^n - 1$. Ses premiers termes sont $2, 5, 11, 23 \ldots$.

— Soit la suite v de premier terme 1, et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2v_n + 1$. Ses premiers termes sont : $1, 3, 7, 15 \ldots$.

— Soit la suite w définie par : w_n est le temps d'ensoleillement, en minutes, au portail du lycée, au n^{e} jour après le premier janvier 2014.

Remarque 26. Soient une suite u.

— u et (u_n), $(u(n))$ désignent la suite ;

— $u(n)$ et u_n sont des réels : ce sont tous les deux le terme de la suite de rang n.

En prenant une fonction f pour analogie, on peut comparer u et (u_n) à f, et u_n à $f(x)$ (pour un certain x).

Définition 27. Une suite est u est dite :

— *croissante* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$;

— *décroissante* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$;

— *constante* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0$.

Exemple 28. TODO Suite croissante, décroissante, croissante à partir d'un certain rang, ni croissante ni décroissante.

2 Suites arithmétiques

Définition 29. Une suite u est dite *arithmétique* s'il existe un réel r, appelé *raison*, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait : $u_{n+1} = u_n + r$.
Habituellement, une suite arithmétique est définie par la donnée de son premier terme et sa raison.

Exemple 30.

— La suite $0, 1, 2, 3$ est une suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 1.

— La suite $-\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$ est une suite arithmétique de premier terme $-\frac{\pi}{4}$ et de raison $\frac{\pi}{4}$.

— La suite $97,1; 96,2; 95,3$ est une suite arithmétique de premier terme $97,1$ et de raison $-0,9$.

— La suite $1, 1, 1, 1$ est une suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 0.

Remarque 31. Dans toute la suite, on considère la suite u arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.

Méthode 32. TODO Prouver qu'une suite est arithmétique.

Propriété 33.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = u_p + (n - p)r$.

— En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = u_0 + nr$.

Propriété 34. La suite u est :

— (strictement) croissante si et seulement si sa raison est (strictement) positive ;

— (strictement) décroissante si et seulement si sa raison est (strictement) négative ;
— constante si sa raison est nulle.

Démonstration. Soit u une suite arithmétique.
TODO Revoir : cette propriété n'a pas encore été vue.
Alors u est croissante si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. Or, puisque u est arithmétique, $u_{n+1} - u_n$ est égale à sa raison, donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ si et seulement si sa raison est positive.
Les autres cas se démontrent de manière similaire. □

Propriété 35. TODO Limite ? Dans le chapitre suivant ?

Propriété 36. La somme des n premiers termes d'une suite arithmétique est donnée par la formule

$$\text{Somme} = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

En particulier :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration. On ne démontre que le cas particulier ; le cas général est admis.
On appelle $S = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n$. En écrivant la même somme, mais en partant du plus grand terme, on a : $S = n + (n-1) + \ldots + 2 + 1$.
On ajoute membre à membre ces deux expressions de S :

$$2S = ((1+n) + (2+n-1) + \ldots + ((n-1)+2) + (n+1)$$

On remarque alors que chacun de ces termes est égal à $n+1$, et qu'ils sont au nombre de n. Ainsi, $2S = n(n+1)$, ou encore :

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

□

3 Suites géométriques

Définition 37. Une suite v est dite *géométrique* s'il existe un réel q non nul, appelé *raison*, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait : $v_{n+1} = qv_n$.
Habituellement, une suite géométrique est définie par la donnée de son premier terme et de sa raison.

Exemple 38.

- La suite $2, 4, 8, 16, \dots$ est géométrique de premier terme 2 et de raison 2.
- On place 100 € sur un compte en banque, rapportant 3 % d'intérêts par ans. Si on ne place ni ne retire d'argent sur le compte, la suite constituée des sommes présentes sur le compte, en euros, à la fin de chaque année est géométrique de premier terme 100 et de raison $1,03$.
- La suite $256, -128, 64, -32 \dots$ est géométrique de premier terme 256 et de raison $-\frac{1}{2}$.
- La suite $3, 3, 3, 3 \dots$ est géométrique de premier terme 3 et de raison 1.

Remarque 39. Dans toute la suite, v est une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q.

Propriété 40.

- Pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = v_p q^{n-p}$.
- En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = v_0 q^n$.

Propriété 41. TODO Simplifier ?

1. Soit w la suite définie par $w_n = q^n$ (pour $n \in \mathbb{N}$). La suite w est :
   - croissante si $q \geqslant 1$;
   - décroissante si $0 < q \leqslant 1$;
   - constante si $q = 1$;
   - ni croissante ni décroissante si $q < 0$.

   De plus, elle est strictement croissante (resp. strictement décroissante) si $q > 1$ (resp. $0 < q < 1$).
2. La suite v :
   - a les mêmes variations que w si $v_0 > 0$;
   - a des variations opposées si $v_0 < 0$;
   - est constante si $v_0 = 0$.

Démonstration. Soit w la suite géométrique définie dans la propriété, avec q supérieur à 1. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a $w_{n+1} = q w_n$ par définition de w. Or quel que soit n, w_n est un produit de termes strictement positifs, donc w_n est lui-même un nombre strictement positif. Donc $\frac{w_{n+1}}{w_n} \geqslant q$, et la suite est croissante.
Les autres cas se démontrent de manière similaire. □

Remarque 42. On dit qu'une suite géométrique de raison $q > 1$ croît de manière *exponentielle*. TODO développer.

Propriété 43. Soit un nombre réel q différent de 0 et 1. La somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison q est donnée par la formule

$$\text{Somme} = \text{Premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

Démonstration. *On suppose d'abord que le premier terme de la suite est 1.*
Soit v une suite géométrique de premier terme 1 et de raison q ($q \neq 0$ et $q \neq 1$). Soit n un entier naturel. On pose

$$S = \sum_{k=0}^{n} v_k = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n$$

On a alors $qS = q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n+1} = S + q^{n+1} - 1$, et donc $S = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
Cas général : le premier terme de la suite n'est pas nécessairement 1.
Soit w la suite définie par $w_n = q^n$. On remarque que pour tout n, $v_n = v_0 q^n = v_0 w_n$. Donc la somme des termes de 0 à n de v vaut :

$$\sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n} v_0 w_k = v_0 \sum_{k=0}^{n} w_k = v_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

□

4 Variations d'une suite

Propriété 44. Soit u une suite, telle que tous ses termes sont strictement positifs.

- u est croissante si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$.
- u est décroissante si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$.

Propriété 45. Soient u une suite, et f une fonction telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait : $u_n = f(n)$.

- Si f est croissante sur $[0; +\infty[$, alors u est croissante sur $\mathbb{N}$.
- Si f est décroissante sur $[0; +\infty[$, alors u est décroissante sur $\mathbb{N}$.
- La réciproque n'est pas vraie en général.

Exemple 46. TODO Exemple de réciproque vraie et fausse.

Définition 47 (Notion de limite)**.** *Ces définitions ne sont pas formelles.*

- On dit qu'une suite u tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) lorsqu'elle peut prendre des valeurs aussi grandes que l'on veut (en prenant n suffisament grand). On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (resp. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$).
- On dit qu'une suite u tend vers un réel l lorsqu'elle peut prendre des valeurs v_n aussi proches de l que l'on veut (en prenant n suffisament grand). On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

5 Algorithmes

TODO
Valeur du terme de rang n (terme et somme)
Dépassement de seuil (terme et somme)

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$$

Chapitre 2

Trigonométrie

1 Radians

Définition 48. La mesure en *radian* d'un angle de sommet O, est la longueur de l'arc de cercle de centre O et de rayon 1, incercepté par cet angle.

Propriété 49 (Conversion des degrés en radian)**.**

— Les mesures en degré et radian sont proportionnelles ;

— $360° = 2\pi$.

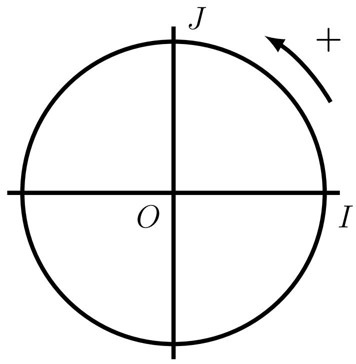
Définition 50. Dans le plan orienté, la mesure d'un angle orienté est positive si l'angle est dans le sens direct (ou positif, ou trigonométrique), et négative si elle est dans le sens indirect (ou négatif).

Définition 51. Étant donnés trois points A, B, C, on désigne par $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ l'angle orienté formé par les deux demi-droites $[AB)$ et $[AC)$.

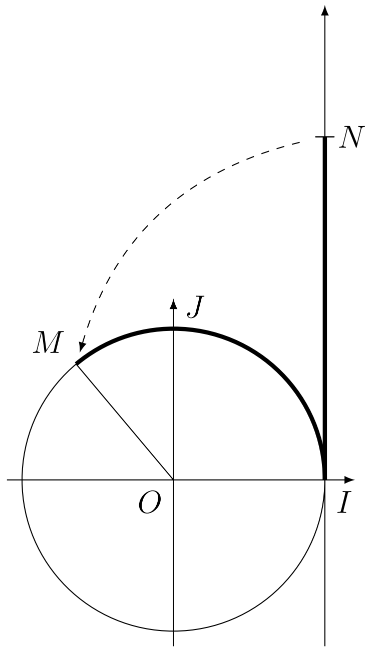
Propriété 52. Étant donné un angle orienté de mesure α, les mesures $\alpha + 2k\pi$, pour $k \in \mathbb{Z}$, sont aussi des mesures de cet angle.

2 Cercle trigonométrique

Définition 53. On appelle *cercle trigonométrique* le cercle de centre O, de rayon 1, orienté dans le sens direct.

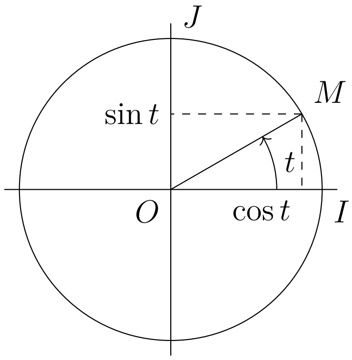


Propriété 54. On considère le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$, et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = 1$. En « enroulant » cette droite autour du cercle $\mathcal{C}$, on obtient une correspondance entre un point N de la droite et un unique point M du cercle.



3 Sinus et cosinus

Définition 55. Soit M un point du cercle trigonométrique, la mesure de l'angle $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM})$ étant noté t. On appelle *cosinus* et *sinus* de cet angle t les coordonnées de ce point.



Propriété 56. Soit t un réel.

(i) $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$

(ii) $-1 \leqslant \sin t \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \cos t \leqslant 1$

Démonstration. (i) Théorème de Pythagore dans le cercle trigonométrique.

(ii) Admise.

□

Propriété 57 (Triangle rectangle)**.** Dans un triangle rectangle, on a : $\sin(\text{angle}) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}}$; $\cos(\text{angle}) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénuse}}$; $\tan(\text{angle}) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$.

Propriété 58 (Valeurs remarquables)**.**

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Démonstration. Voir les exercices page 192 du manuel. □

400%

Chapitre 4

Probabilités conditionnelles

1 Probabilité conditionnelle

TODO
Indépendance

2 Probabilités totales

TODO

Chapitre 3

Équations et Inéquations du second degré

Définition 59. Un *trinôme du second degré* est une fonction f de la forme $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des réels, et $a \neq 0$.

1 Racines

Définition 60. On appelle *racines* d'un trinôme $ax^2 + bx + c$ les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Définition 61. Étant donné un trinôme $ax^2 + bx + c$, on appelle *discriminant* de ce trinôme le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.

Propriété 62. Soit un trinôme $ax^2 + bx + c$, et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant. Trois cas seulement sont possibles :

— si $\Delta > 0$, le trinôme a deux racines $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$;

— si $\Delta = 0$, le trinôme a une unique racine (dite *racine double*) $x_1 = \frac{-b}{2a}$;

— si $\Delta < 0$, le trinôme n'a pas de racines.

Propriété 63 (De la forme canonique à la forme factorisée)**.** Un trinôme $ax^2 + bx + c$ peut être mis sous la forme :

- $a(x - x_1)(x - x_2)$ si $\Delta > 0$, et alors $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$;
- $a(x - x_1)^2$ si $\Delta = 0$, et alors $x_1 = \frac{-b}{2a}$;
- ne peut pas être factorisé si $\Delta < 0$.

2 Signe

Propriété 64. Soit un trinôme $ax^2 + bx + c$, et Δ son discriminant.

— si $\Delta > 0$, le trinôme est du signe de a à l'extérieure des racines, et du signe de $-a$ à l'intérieur ;

— si $\Delta = 0$, le trinôme est du signe de a, strictement sauf en l'unique racine où il est nul ;

— si $\Delta < 0$, le trinôme est du signe de a, strictement.

3 Bilan et Interprétation géométrique

TODO : Fiche de synthèse

Chapitre 5

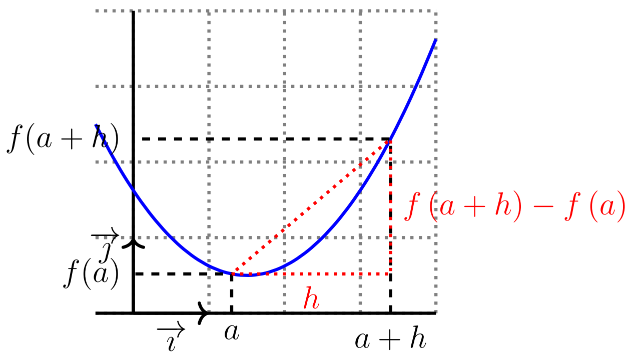
Dérivation

1 Nombre dérivé d'une fonction

Définition 65 (Taux d'accroissement)**.** Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}$, et $a \in \mathcal{D}$. Pour $h \neq 0$, $a + h \in \mathcal{D}$, on appelle taux d'accroissement le rapport :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Remarque 66. Le taux d'accroissement est la pente de la droite passant par les points $(a, f(a))$ et $(a + h, f(a + h))$.



Définition 67 (Nombre dérivé)**.** Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}$, et $a \in \mathcal{D}$. S'il existe l tel que la limite de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tende vers l quand h tend vers 0, alors :

- — on dit que f est*dérivable* en a ;
- — on note $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+x)-f(a)}{h} = l$;
- — $l = f'(a)$ est appelé *nombre dérivé de f en a.*

Propriété 68 (Interprétation géométrique)**.** Si une fonction f est dérivable en a, alors $f'(a)$ est la pente de la tangente à la courbe de f en $(a, f(a))$.

2 Tangente

Définition 69 (Tangente)**.** Soient I un intervalle, $a \in I$, f une fonction définie sur I, dérivables en a, et $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f. La droite passant par le point $(a, f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$ est appelée *tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a*.

Remarque 70. Visuellement, cette définition correspond à la définition déjà connue d'une tangente à un cercle : la tangente à une courbe $\mathcal{C}_f$ au point de coordonnées $(a, f(a))$ est la droite passant par ce point, et ne « touchant » la courbe qu'en ce point là, dans un voisinage de ce point.

Propriété 71 (Tangente)**.** Soit f une fonction dérivable en a. L'équation de la tangente à la courbe de f en $(a, f(a))$ est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

TODO Lecture graphique ; Tracé.

3 Fonctions et opérations usuelles

Définition 72 (Dérivée d'une fonction)**.** Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}$, et I un sous-ensemble de $\mathcal{D}$. On dit que f est *dérivable sur I* si f est dérivable en tout point de I.
On appelle *fonction dérivée de f*, et on note f', la fonction qui à tout point x de I associe le réel $f'(x)$, nombre dérivé de f en x.

Propriété 73 (Dérivées des fonctions usuelles)**.**

— Sur $]0; +\infty[$, la dérivée de la fonction racine $x \mapsto \sqrt{x}$ est $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

— Sur $\mathbb{R}^*$, la dérivée de la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ est $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$.

— Sur $\mathbb{R}$, pour n un entier relatif non nul, la dérivée de $x \mapsto x^n$ est $x \mapsto nx^{n-1}$.

Remarque 74. La dernière propriété est vraie pour tout α réel non nul, pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$ (ou $x \in \mathbb{R}^*$ is $\alpha > 0$) : la dérivée de $x \mapsto x^\alpha$ est $x \mapsto \alpha x^{\alpha - 1}$. De là, on peut en déduire les deux propriétés précédentes : soient $u : x \mapsto \sqrt{x}$ et $v : x \mapsto \frac{1}{x}$. Alors, quel que soit x réel, $u(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ et $v(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$, et :

$$u'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$v'(x) = -1 \times x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

Corollaire 75. Sur $\mathbb{R}$:

- la dérivée d'une fonction constante (pour un k réel) $x \mapsto k$ est la fonction nulle $x \mapsto 0$;
- la dérivée d'une fonction affine $x \mapsto ax+b$ est une fonction constante $x \mapsto a$;
- la dérivée de la fonction carré $x \mapsto x^2$ est $x \mapsto 2x$.
- la dérivée de la fonction cube $x \mapsto x^3$ est $x \mapsto 3x^2$.

TODO Fonction valeur absolue non dérivable en 0.

Propriété 76 (Opérations usuelles)**.** Soient u, v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et λ un réel. Alors :

- $(\lambda u)' = \lambda u'$;
- $(u+v)' = u' + v'$ (la dérivée de la somme est la somme des dérivée) ;
- $(u \times v)' = u'v + v'u$;
- $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ (si u ne s'annule pas sur I).
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-v'u}{v^2}$ (si v ne s'annule pas sur I).
- La dérivée de $x \mapsto g(ax+b)$ est $x \mapsto ag'(ax+b)$.

$2^5 - 5^2$

Chapitre 7

Fonctions trigonométriques

0 Rappels

Remarque 77. Oubliez les nombres pairs et impairs : les fonctions paires et impaires n'ont rien à voir avec ça !

Définition 78.

- Une fonction f est dite *paire* si pour tout x de son ensemble de définition, $f(-x) = f(x)$.
- Une fonction f est dite *impaire* si pour tout x de son ensemble de définition, $f(-x) = -f(x)$.

Propriété 79.

- La courbe représentative d'une fonction *paire* est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- La courbe représentative d'une fonction *impaire* est symétrique par rapport à l'origine.

Exemple 80.

- La fonction carré $f : x \mapsto x^2$ est paire, mais pas impaire.

  Paire Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^2 \\ &= (-1)^2 \times x^2 \\ &= x^2 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

  Donc $f(-x) = f(x)$: la fonction est paire.

Impaire Prenons par exemple $x = 3$. D'une part, $f(-3) = (-3)^2 = 9$. D'autre part, $-f(3) = -3^2 = -9$. Donc $f(-3) \neq -f(3)$, et la fonction n'est pas impaire.

— La fonction cube $f : x \mapsto x^3$ est impaire, mais pas paire.

Paire Prenons par exemple $x = 3$. D'une part, $f(-3) = (-3)^3 = -27$. D'autre part, $f(3) = 3^2 = 27$. Donc $f(-3) \neq f(3)$, et la fonction n'est pas paire.

Impaire Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 \\ &= (-1)^3 \times x^3 \\ &= -1 \times x^3 \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Donc $f(-x) = -f(x)$: la fonction est impaire.

Exercice (Défi — Optionnel)**.**

1. Déterminer une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui soit à la fois paire et impaire.
2. Montrer que cette fonction est l'unique fonction à la fois paire et impaire.

1 Définitions et Propriétés

Définition 81.

— La fonction *sinus* est la fonction définie sur $\mathbb{R}$, qui à tout nombre x associe $\sin x$.

— La fonction *cosinus* est la fonction définie sur $\mathbb{R}$, qui à tout nombre x associe $\cos x$.

Propriété 82.

— La fonction *sinus* est impaire, mais pas paire.

— La fonction *cosinus* est paire, mais pas impaire.

Propriété 83. Les fonctions *sinus* et *cosinus* sont *périodiques* de période 2π, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x \text{ et } \sin(x + 2\pi) = \sin x$$

Exemple 84. On donne (ou on rappelle) :

$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ $\qquad$ $\sin\frac{\pi}{10} = \frac{1}{1+\sqrt{5}}$

Déterminer, sans aucun calcul, les valeurs suivantes :
(a) $\sin -\frac{\pi}{10}$ $\qquad$ (b) $\cos -\frac{\pi}{8}$ $\qquad$ (c) $\cos\frac{13\pi}{6}$

(a) Puisque la fonction sinus est impaire, alors :

$$\sin -\frac{\pi}{10} = -\sin\frac{\pi}{10} = -\frac{1}{1+\sqrt{5}}$$

(b) Puisque la fonction cosinus est paire, alors :

$$\cos -\frac{\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

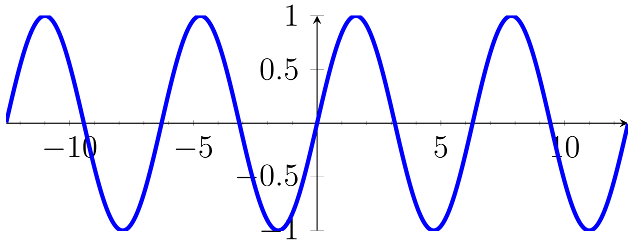
(c) Puisque la fonction cosinus est périodique de période 2π, alors :

$$\cos\frac{13\pi}{6} = \cos\left(\frac{12\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

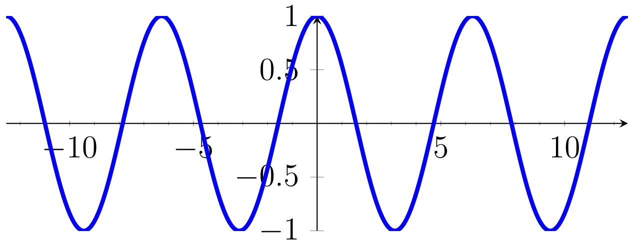
2 Représentation graphique

Définition 85. Les courbes des fonctions sinus et cosinus sont des *sinusoïdes.*

Fonction sinus



Fonction cosinus



Propriété 86.

- La courbe de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine (car la fonction est impaire).
- La courbe de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (car la fonction est paire).
- Les courbes des fonctions sinus et cosinus sont invariantes par translation de vecteur $2\pi\overrightarrow{\imath}$ (car les fonctions sont périodiques de période 2π).

$\int_0^3 x^2 dx$

Chapitre 9

Produit scalaire

1 Expressions et Orthogonalité

Définition 87. Étant donnés deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on appelle *produit scalaire* de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le nombre réel :

- 0 si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$;
- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|.\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ sinon.

Propriété 88. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs.

— Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$.

— Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$ si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.

Propriété 89 (Autres expressions)**.** Étant donnés deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, on a :

— $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy'$

— Si $\overrightarrow{u} \neq 0$, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v_1}$, où $\overrightarrow{v_1}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{v}$ sur la droite de direction $\overrightarrow{u}$.

Démonstration. Démonstration □

Propriété 90. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs colinéaires. Alors :

- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$ si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont le même sens ;
- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = -\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$ si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont de sens opposé.

Avec des points

Propriété 91 (Avec des points)**.** Soient trois points A, B, C, distincts deux à deux. Alors :

— $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos\widehat{BAC}$

— $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$, où H est le projeté orthogonal de C sur (AB).

Corollaire 92. Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs colinéaires. Alors :

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = AB \times CD$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont le même sens ;
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = -AB \times CD$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont de sens opposé.

Corollaire 93. Soient A, B, C, D quatre points, tels que $A \neq B$ et $C \neq D$. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$ si et seulement si (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

2 Règles de calcul

Propriété 94. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur. On note $\overrightarrow{u}^2 = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2$.

Propriété 95 (Règles de calcul)**.** Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs, et k un réel. Alors :

(i) Le produit scalaire est commutatif : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$

(ii) Le produit scalaire est distributif sur l'addition : $\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} = (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}).\overrightarrow{u}$.

(iii) $(k\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = k(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}.(k\overrightarrow{v})$.

(iv) $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2$

(v) $(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 - 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2$

(vi) $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}^2 - \overrightarrow{v}^2$

Exemple 96. Preuve du théorème de Pythagore

3 Application dans un triangle

Théorème 97 (Théorème d'Al Kashi)**.** Soit un triangle ABC. Alors

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC.\cos\widehat{BAC}$$

Démonstration. TODO □

$\sqrt{13^2 - 5^2}$

Chapitre 12

Applications au produit scalaire

TODO

$\det(2I_3)$

Chapitre 8

Applications à la dérivation

TODO

$\overline{1011}^2$

Chapitre 11

Fonction exponentielle

1 Définition et Premières propriétés

Définition, règles de calcul
Définition de la fonction exponentielle, comme unique fonction dérivable sur R vérifiant f' = f et f(0) = 1. L'existence et l'unicité sont admises. Notation exp(x). Pour tous réels x et y, exp(x + y) = exp(x) exp(y) et exp(x) exp(-x) = 1

2 Constante e

TODO
Encore les règles
Nombre e, notation e^x.

3 Fonction exponentielle

Signe, variations, représentation
Équation et inéquation

4 Fonction e^{ax+b}

Dérivée
Courbe de $e^{\pm kx}$

5 Suites géométriques

TODO
pour tout réel a, la suite e^{na} est géométrique

Chapitre 10

Variables aléatoires

TODO