# 1 Définitions

**Définition.** Étant donné une expérience aléatoire d'univers $\Omega$, on appelle ____________________ une fonction $X$ définie sur $\Omega$ et à valeur dans dans $\mathbb{R}$.

**Définition.** Étant donné une variable aléatoire $X$, on définit les évènements suivants :

- $\{X = x\}$ : l'ensemble des issues de $\Omega$ auxquelles on associe le réel $x$.
- $\{X \geqslant x\}$ : l'ensemble des issues de $\Omega$ auxquelles on associe un réel supérieur ou égal à $x$.

Les évènements $\{X \leqslant x\}$ ; $\{X < x\}$ ; $\{X > x\}$ sont définies de la même manière.

**Exemple 1.** On répond au hasard à un questionnaire à choix multiples composé de 4 questions. On note par exemple : $JJFJ$ l'issues « on a choisi la réponse juste aux deux premières questions, puis une réponse fausse, puis la réponse juste ».
On définit $X$ la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de réponses justes.
Lister les issues des évènements suivants : (a) $\{X = 4\}$ (b) $\{X = 1\}$ (c) $\{X \geqslant 3\}$ (d) $\{X < 2\}$

**Définition.**

— La probabilité de l'évènement $\{X = x\}$ est la somme des probabilités des issues de $\Omega$ auxquelles on associe $x$ par la variable aléatoire $X$.

— La ____________________ de $X$, généralement présentée sous la forme d'un tableau, est la donnée de chacune des probabilités de $\{X = x\}$, pour toutes les valeurs possibles de $x$.

**Exemple 2.** On répond aux hasard à un QCM composé de trois questions. Chaque question a quatre réponses possibles, dont une seule correcte, et on y répond en utilisant un dé équilibré à quatre faces.
On appelle $X$ la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de réponses possibles.

1. Représenter la situation par un arbre de probabilités.
2. Déterminer la loi de probabilité de $X$.
3. Quelle est la probabilité d'avoir au moins deux réponses justes ?

## 2 Espérance, Variance, Écart-type

**Définition.** L'espérance d'une variable aléatoire $X$ (prenant les valeurs $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$) est le nombre réel $E(X)$, donné par la formule :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = x_1 P(X = x_1) + x_2 P(X = x_2) + ... + x_n P(X = x_n)$$

**Remarque.** L'espérance d'une variable aléatoire $X$ associée à une expérience aléatoire correspond à la __________ obtenue en répétant l'expérience aléatoire un grand nombre de fois.

**Exemple 3.** Toute une classe a répondu au hasard au QCM de l'exemple **??**. Quelle est le nombre moyen de réponses justes obtenu par les élèves ?

**Définition.** Étant donné une variable aléatoire $X$ (prenant les valeurs $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$) on définit :

- la variance $V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 \times P(X = x_i)$
- l'écart-type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

**Propriété.** On peut aussi calculer la variance d'une variable aléatoire $X$ comme :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

**Remarque.**

— L'espérance est un indicateur de *position* de la variable aléatoire.

— La variance et l'écart-type sont des indicateurs de *dispersion* de la variable aléatoire.

**Exemple 4.** Calculer la variance et l'écart-type de la variable aléatoire définie à l'exemple **??**.