Exercice 1 (Jeu infini)**.** *Une kermesse propose le jeu suivant : un joueur lance un dé équilibré à six faces. Si 2, 3, 4, 5 ou 6 est obtenu, il gagne le nombre de bonbons indiqués sur le dé et le jeu s'arrête. Si 1 est obtenu, il gagne un bonbon, et relance le dé pour le même jeu.*
Par exemple : une joueuse lance le dé et obtient 1 : elle gagne un bonbon et rejoue. Elle fait à nouveau 1 : elle gagne un second bonbon. Elle relance le dé et obtient 3 : elle gagne trois bonbons et le jeu s'arrête. Elle a gagné au total 5 bonbons.
L'objet de l'exercice est de calculer l'espérance de la variable aléatoire X associée au nombre de bonbons gagnés à ce jeu. La formule vue en cours ne peut pas être utilisée car le nombre de lancers n'étant pas limité, l'univers est infini.
On fait alors l'hypothèse suivante : sur un 1, plutôt que relancer le dé, on gagne $1+E(X)$, c'est-à-dire 1 plus le gain moyen obtenu sur le second lancer (qui est identique au gain moyen du jeu). Les valeurs prises par la variable aléatoire X sont alors $\{1+E(X), 2, 3, 4, 5, 6\}$.

1. *Dresser la loi de probabilité de X.* Le dé est équilibrée, donc les six issues sont équiprobables (de probabilité 1/6).

x	$1+E(X)$	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

2. *En utilisant la formule de l'espérance vue en cours, montrer que*

$E(X) = \frac{21+E(X)}{6}$.

$$\begin{aligned}
E(X) &= \frac{1}{6} \times (1 + E(X)) + \frac{1}{6} \times 2 + \frac{1}{6} \times 3 + \ldots + \frac{1}{6} \times 6 \\
E(X) &= \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times E(X) + \frac{20}{6} \\
E(X) &= \frac{21 + E(X)}{6}
\end{aligned}$$

3. *Résoudre l'équation pour déterminer $E(X)$.*

$$\begin{aligned}
E(X) &= \frac{21 + E(X)}{6} \\
6E(X) &= 21 + E(X) \\
5E(X) &= 21 \\
E(X) &= \frac{21}{5}
\end{aligned}$$

Donc le gain moyen est $\frac{21}{5}$, soit 4,2 bonbons par partie.

Pour être rigoureux, avec cette méthode, nous n'avons pas prouvé que $E(X)$ est égale à la valeur trouvée à la question précédente : nous avons seulement montré que si l'espérance $E(X)$ existe, *elle est égale à cette valeur.*

4. Difficile. *Modifier cette expérience aléatoire, ou en inventer une nouvelle, telle que la résolution de l'équation obtenue par la même méthode qu'à la question 2 ne donne pas un résultat correct. Expliquer l'erreur en termes non mathématiques : Quelles caractéristiques de l'expérience aléatoire font que le résultat n'est pas correct ?*

Je remplace discrètement le dé par un dé pipé qui fait toujours 1. La loi de probabilité de la variable aléatoire Y représentant la nouvelle expérience est donc :

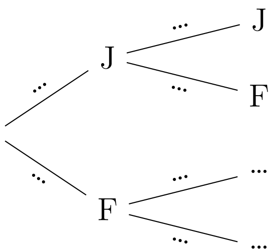
Gain	$1+E(Y)$
Probabilité	1

Donc l'espérance est $E(Y) = 1 \times (1 + E(Y))$, et en résolvant l'équation, on trouve $0 = 1$, ce qui est impossible. L'équation n'a donc pas de solutions.

Le problème de cette expérience est que l'espérance est infinie : en moyenne, on « gagne » une infinité de bonbons. La méthode utilisée à la question précédente ne fonctionne donc plus.

Exercice 2 (QCM)**.** *Un exercice est composé de trois questions à choix multiple. Chaque question a quatre propositions de réponses, dont une seule est correcte.*
Une réponse correcte rapporte 2 points ; une réponse incorrecte en enlève 1. Un score final négatif est ramené à zéro.
Un élève répond au hasard à ce QCM ; on note X la variable aléatoire associée au nombre de points gagnés.

1. *L'arbre de probabilité ci-dessous (dans lequel J signifie « Réponse juste » et F signifie « Réponse fausse »), qui décrit l'expérience aléatoire composée de la succession des réponses aux trois questions, est incomplet : il ne décrit que (partiellement) les deux première questions, et il manque les probabilités.*



Recopier et compléter cet arbre : (a) tracer les branches manquantes ; (b) écrire les probabilités ; (c) écrire, pour chaque branche : sa probabilité, le nombre de réponses correctes, et le nombre de points gagnés par l'élève (par exemple, la branche tout en bas devrait être : probabilité : 1/8 *; nombre de réponses correctes : 0 ; nombre de points : 0).*

Voir l'arbre sur la figure 1 (page 5).

2. *En utilisant l'arbre de la question précédente, recopier et compléter le tableau suivant, pour déterminer la loi de probabilité de X.*

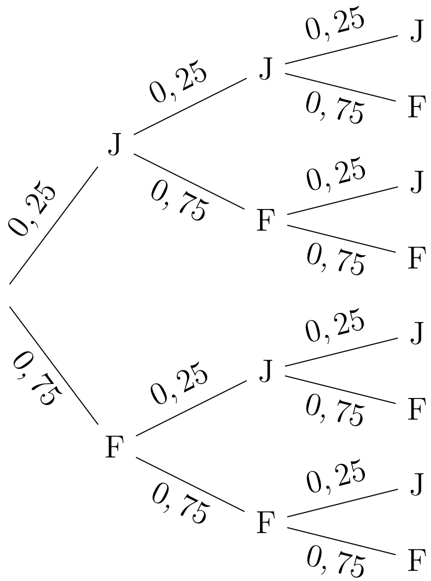
Réponses correctes	0	1	2	3
Nombre de points	0	0	3	6
Probabilité	27/64	27/64	9/64	1/64

3. *Calculer l'espérance et la variance de X.* L'espérance est :

$$E(X) = 0 \times \frac{27}{64} + 0 \times \frac{27}{64} + 3 \times \frac{9}{64} + 6 \times \frac{1}{64} \approx 0,52$$

À la calculatrice, on trouve un écart-type de $1,25$ et une variance de $1,56$ environ.

4. *Quelle est la note moyenne qu'obtiendraient un grand nombre de candidats répondant au hasard ?* En moyenne, ces candidats répondant au hasard obtiendraient une note de $0,52/6$.



Proba : 1/64 ; 3 justes ; 6 points.

Proba : 3/64 ; 2 justes ; 3 points.

Proba : 3/64 ; 2 justes ; 3 points.

Proba : 9/64 ; 1 justes ; 0 points.

Proba : 3/64 ; 2 justes ; 3 points.

Proba : 9/64 ; 1 justes ; 0 points.

Proba : 9/64 ; 1 justes ; 0 points.

Proba : 27/64 ; 0 justes ; 0 points.

Figure 1 – Arbre de probabilité de l'exercice 2.