

Exercice 1. *Un opérateur de téléphonie mobile souhaite réaliser une enquête auprès de ses abonnés. Pour les inciter à répondre, il propose aux participants un tirage au sort, dans lequel ils peuvent gagner 30 minutes de communication une fois sur six, 20 minutes une fois sur trois et 10 minutes sinon.*

On appelle X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de minutes gagnées.

1. *Donner la loi de probabilité de X , sous la forme d'un tableau. Voici la loi de probabilités.*

x	10	20	30
$P(X = x)$	p	1/3	1/6

La probabilité p de gagner 10 minutes de communication est inconnue, mais la somme des probabilités des issues est égale à 1, donc $p + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$, donc $p = \frac{1}{2}$. Donc :

x	10	20	30
$P(X = x)$	1/2	1/3	1/6

2. *Calculer l'espérance la variable aléatoire X .*

$$\begin{aligned}
 E(X) &= 10 \times \frac{1}{2} + 20 \times \frac{1}{3} + 30 \times \frac{1}{6} \\
 &= 10 \times \frac{3}{6} + 20 \times \frac{2}{6} + 30 \times \frac{1}{6} \\
 &= \frac{10 \times 3 + 20 \times 2 + 30 \times 1}{6} \\
 &= \frac{100}{6} \\
 &= \frac{50}{3}
 \end{aligned}$$

3. *Que représente cette espérance ?* Cette espérance représente le gain moyen des clients. En moyenne, en répondant au sondage, ils gagnent $\frac{50}{3} \approx 16,7$ minutes de communication.

Exercice 2. *Un casino imagine un nouveau jeu, très simple. Une joueuse mise une somme d'argent m , de son choix, puis lance un dé.*

- *si elle obtient 1 ou 2, elle a perdu sa mise ;*
- *si elle obtient 6, elle gagne a fois sa mise (pour un certain nombre a à déterminer) ;*
- *sinon, elle reprend sa mise.*

On appelle X la variable aléatoire qui au résultat du dé associe le gain algébrique du jeu.

1. *Montrer que la loi de probabilité de X est la suivante.*

$$\frac{x}{P(X=x)} \quad \left\| \begin{array}{c|c|c} -m & 0 & a \times m \\ \hline 2/6 & 3/6 & 1/6 \end{array} \right.$$

- Si la joueuse obtient 1 ou 2 (deux chances sur six sur un dé équilibré), elle perd sa mise, donc le gain algébrique est $-m$;
- si elle obtient 6 (une chance sur 6), elle gagne a fois sa mise, donc son gain est $a \times m$;
- sinon (probabilité de $1 - \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$), elle reprend sa mise, donc elle n'a rien gagné.

Cela donne la loi de probabilités données dans l'énoncé.

2. Calculer l'espérance $E(X)$ de X (en fonction de m et a).

$$\begin{aligned} E(X) &= -m \times \frac{2}{6} + 0 \times 36 + a \times m \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{-2m + 0 + a \times m}{6} \\ &= \frac{(a-2)m}{6} \end{aligned}$$

L'espérance est donc $\frac{(a-2)m}{6}$.

3. Quelles valeurs peut prendre a pour que le casino ne perde pas d'argent ? Pour que le casino ne perde pas d'argent, il faut que les joueurs en perde, c'est-à-dire que $E(X) \leq 0$:

$$\begin{aligned} E(X) &\leq 0 \\ \frac{(a-2)m}{6} &\leq 0 \\ (a-2)m &\leq 0 \\ a-2 &\leq 0 \\ a &\leq 2 \end{aligned}$$

Donc pour que le casino ne perde pas d'argent, il faut que $a \leq 2$. En d'autres termes, sur un 6, la joueuse doit gagner moins de deux fois sa mise.