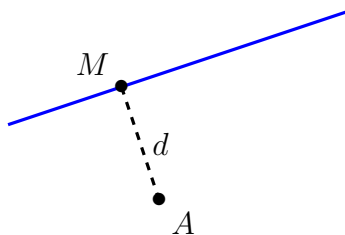


Lisez et comprenez ce document.

**Définition et Propriété.** On appelle distance d'un point  $A$  à une droite la plus petite distance entre un point de cette droite et  $A$ . Cette distance est obtenue avec le projeté orthogonal de  $A$  sur la droite.



**Exemple.** Soit  $A(2; 8)$  un point du plan muni d'un repère orthonormé, et  $d$  la droite d'équation  $3x - 4y + 8 = 0$ . Quelle est la distance de  $A$  à  $d$  ?

Soit  $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  le projeté orthogonal de  $A$  sur la droite  $d$ . Il faut donc calculer la distance  $AM$ . Soit  $\vec{n}$  un vecteur normal à la droite : calculons la valeur absolue du produit scalaire  $|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|$  de deux manières différentes.

Remarquons d'abord que puisque l'équation de la droite est  $3x - 4y + 8 = 0$ , alors nous pouvons prendre  $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$  comme vecteur normal.

- D'une part, puisque  $M$  est le projeté orthogonal de  $A$  sur la droite, alors  $\overrightarrow{AM}$  est un vecteur normal à la droite, donc  $\overrightarrow{AM}$  et  $\vec{n}$  sont colinéaires. Donc  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = \|\overrightarrow{AM}\| \times \|\vec{n}\|$  ou  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = -\|\overrightarrow{AM}\| \times \|\vec{n}\|$ . Mais puisque seule la valeur absolue nous intéresse, nous pouvons affirmer que :

$$\begin{aligned}
 |\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}| &= \|\overrightarrow{AM}\| \times \|\vec{n}\| \\
 &= AM \times \|\vec{n}\| \\
 &= AM \times \sqrt{a^2 + b^2} \\
 &= AM \times \sqrt{3^2 + (-4)^2} \\
 &= 5AM
 \end{aligned}$$

— D'autre part, puisque les coordonnées de  $A$  sont  $A\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 8 \end{smallmatrix}\right)$ , alors  $\overrightarrow{AM}\left(\begin{smallmatrix} x-2 \\ y-8 \end{smallmatrix}\right)$ , et donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} &= (x - 2) \times 3 + (y - 8) \times (-4) \\ &= 3x - 6 - 4y + 32 \\ &= 3x - 4y + 26\end{aligned}$$

Ensuite, puisque le point  $M$  est sur la droite, alors ses coordonnées vérifient l'équation de la droite  $3x - 4y + 8 = 0$ , donc  $3x - 4y = -8$  :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 3x - 4y + 26 = -8 + 26 = 18$$

Et donc  $|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}| = |18| = 18$ .

Nous avons montré, d'une part, que  $|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}| = 5AM$ , et d'autre part, que  $|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}| = 18$ . Donc :

$$\begin{aligned}5AM &= 18 \\ AM &= \frac{18}{5} \\ AM &= 3,6\end{aligned}$$

La distance de  $A$  à la droite est donc 3,6.