

**Exercice 1.** Corrigé dans l'énoncé.

**Exercice 2.** *Katia veut prendre en photo un train depuis le sommet d'une colline, au moment où le train est le plus proche d'elle.*

*Dans un repère orthonormé approprié, le train se déplace en ligne droite selon la droite  $t$  d'équation  $2x - 3y - 3 = 0$ , et Katia est située en  $K(5; -2)$ . On cherche les coordonnées du point  $M$ , le point de la droite le plus proche de  $K$ .*

1. *Justifier que  $M$  est le projeté orthogonal de  $K$  sur  $t$ .*

Puisque  $M$  est le point de la droite le plus proche de  $K$ , alors c'est le projeté orthogonal de  $K$  sur la droite.

2. *Déterminer les coordonnées de  $M$ .*

Soient  $M(x; y)$  les coordonnées de  $M$ . Ce point est le projeté orthogonal de  $K$  sur  $t$ , donc le segment  $[KM]$  est perpendiculaire à la droite, et les vecteurs  $\overrightarrow{KM} \begin{pmatrix} x-5 \\ y+2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  (vecteur directeur de  $t$ ) sont orthogonaux, donc leur produit scalaire est nul :

$$\begin{aligned} (x - 5) \times 3 + (y + 2) \times 2 &= 0 \\ 3x - 15 + 2y + 4 &= 0 \\ 3x + 2y - 11 &= 0 \end{aligned}$$

D'autre part, le point  $M(x; y)$  est sur la droite  $t$ , donc ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne  $2x - 3y - 3 = 0$  de la droite.

Nous cherchons donc les solutions du système suivant.

$$\begin{aligned} L_1 & \begin{cases} 3x + 2y - 11 = 0 \end{cases} \\ L_2 & \begin{cases} 2x - 3y - 3 = 0 \end{cases} \\ L'_1 = 2L_1 & \begin{cases} 6x + 4y - 22 = 0 \end{cases} \\ L'_2 = 3L_2 & \begin{cases} 6x - 9y - 9 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$



2. On appelle  $d$  la distance de  $M$  à l'axe des abscisses. Justifier que  $d^2 = y^2$  (attention : bien prendre en compte le cas où  $M$  est situé sous l'axe des abscisses).

Puisque les coordonnées de  $M$  sont  $M(x; y)$ , alors  $K(x; 0)$  est le projeté orthogonal de  $M$  sur l'axe des abscisses (en effet,  $K$  est sur l'axe des abscisses, et  $[MK]$  est perpendiculaire à l'axe des abscisses).

Donc la distance de  $M$  à l'axe des abscisses est  $d = MK$ .

$$\begin{aligned}d &= MK \\d^2 &= MK^2 \\d^2 &= \sqrt{(x_K - x_M)^2 + (y_K - y_M)^2}^2 \\d^2 &= (x_K - x_M)^2 + (y_K - y_M)^2 \\d^2 &= (x - x)^2 + (0 - y)^2 \\d^2 &= y^2\end{aligned}$$

3. En déduire que  $y^2 = x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13$ , puis que  $y = 0, 25x^2 - 1, 5x + 3, 25$ .

Puisque le point  $M$  est à la même distance de  $A$  et de l'axe des abscisses, alors  $d = AM$ , et  $d^2 = AM^2$ .

$$\begin{aligned}d^2 &= AM^2 \\y^2 &= x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13 \\y^2 - y^2 + 4y &= x^2 - 6x + 13 \\4y &= x^2 - 6x + 13 \\y &= \frac{x^2}{4} - \frac{6}{4}x + \frac{13}{4} \\y &= 0, 25x^2 - 1, 5x + 3, 25\end{aligned}$$

4. Comment appelle-t-on la forme prise par l'ensemble des points à égale distance de  $A$  et de l'axe des abscisses ?

L'ensemble des points dont les coordonnées vérifient  $y = 0, 25x^2 - 1, 5x + 3, 25$  est une parabole.

**Exercice 4.** Dans un repère orthonormé, on considère le cercle de centre  $I(5; 3)$  et de rayon 4, et la droite  $d_m$ , d'équation  $x = m$  (où  $m$  est un nombre réel quelconque).

L'objet de l'exercice est de déterminer le nombre de points d'intersection entre la droite et le cercle en fonction de  $m$ .

0. Avec quel axe la droite  $d_m$  est-elle parallèle ?

Puisque l'équation réduite de la droite est de la forme  $x = m$ , alors la droite est parallèle à l'axe des ordonnées.

Soit  $M(x; y)$  un point d'intersection du cercle et de la droite.

1. Justifier que  $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 16$ .

Puisque  $M$  est sur le cercle de centre  $I(5; 3)$  et de rayon 4, alors :

**Méthode 1.** On applique le théorème du cours :

$$\begin{aligned}(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 &= 4^2 \\ (x - 5)^2 + (y - 3)^2 &= 16\end{aligned}$$

**Méthode 2.** Le segment  $[IM]$  est un rayon du cercle, donc  $IM = 4$  :

$$\begin{aligned}\sqrt{(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2} &= 4 \\ \sqrt{(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2} &= 4^2 \\ (x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 &= 16 \\ (x - 5)^2 + (y - 3)^2 &= 16\end{aligned}$$

2. En déduire que  $y^2 - 6y + m^2 - 10m + 18 = 0$ .

D'une part, d'après la question précédente, on a :  $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 16$ . D'autre part, puisque le point  $M$  est aussi sur la droite  $d$ , alors  $x = m$ . Remplaçons donc  $x$  par  $m$  dans l'équation précédente :

$$\begin{aligned}(m - 5)^2 + (y - 3)^2 &= 16 \\ m^2 - 10m + 25 + y^2 - 6y + 9 - 16 &= 0 \\ y^2 - 6y + m^2 - 10m + 18 &= 0\end{aligned}$$

Pour chercher la valeur de  $y$ , il faut donc résoudre l'équation ci-dessus, qui est un trinôme du second degré (d'inconnue  $y$ ). Appelons  $\Delta_m$  son discriminant.

3. Montrer que  $\Delta_m = -4m^2 + 40m - 36$ .

L'expression  $y^2 - 6y + m^2 - 10m + 18 = 0$  est un trinôme du second degré :

$$\underbrace{y^2}_{a=1} \underbrace{-6y}_{b=-6} \underbrace{+m^2 - 10m + 18}_{c=m^2 - 10m + 18}$$

Son discriminant est :

$$\begin{aligned}\Delta_m &= b^2 - 4ac \\ &= (-6)^2 - 4 \times 1 \times (m^2 - 10m + 18) \\ &= 36 - 4m^2 + 40m - 72 \\ &= -4m^2 + 40m - 36\end{aligned}$$

4. Montrer que le tableau de signes de  $\Delta_m$  en fonction de  $m$  est le suivant.

Le discriminant  $\Delta_m = \underbrace{-4}_{a=-4} \underbrace{m^2 + 40m}_{b=40} \underbrace{-36}_{c=-36}$  est lui même un trinôme du second degré, d'inconnue  $m$ . Son discri-

minant est :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 40^2 - 4 \times (-4) \times (-36) \\ &= 1024\end{aligned}$$

Il y a donc deux racines :  $m_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-40 - \sqrt{1024}}{2 \times (-4)} = 9$   
et  $m_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-40 + \sqrt{1024}}{2 \times (-4)} = 1$ . On a donc le tableau de signes suivant :

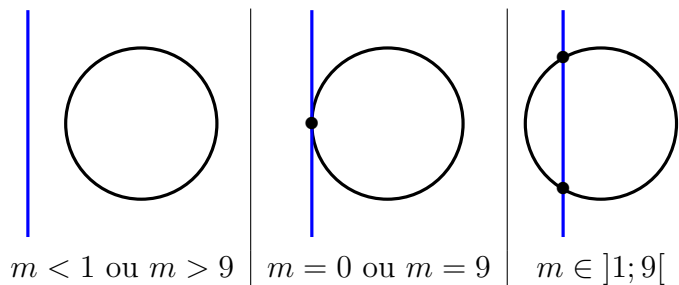
$m$	$-\infty$		1		9		$+\infty$
$\Delta_m$		-	0	+	0	-	

5. En déduire le nombre de points d'intersection entre le cercle et la droite en fonction de  $m$ .

En lisant le tableau de signes, on observe :

- si  $m < 1$  ou  $m > 9$ , alors  $\Delta_m$  est strictement négatif, donc l'équation  $y^2 - 6y + m^2 - 10m + 18 = 0$  n'a pas de solutions, donc il n'y a aucun points d'intersection entre la droite et le cercle ;
- si  $m = 1$  ou  $m = 9$ , alors  $\Delta_m$  est égal à zéro, donc l'équation  $y^2 - 6y + m^2 - 10m + 18 = 0$  a une unique solution, donc il y a un seul point d'intersection entre la droite et le cercle ;
- si  $m \in ]1; 9[$ , alors  $\Delta_m$  est strictement positif, donc l'équation  $y^2 - 6y + m^2 - 10m + 18 = 0$  a deux solutions solutions, donc il y a deux points d'intersection entre la droite et le cercle.

Ces différents cas sont illustrés ci-dessous :



6. *Quelle est la position relative de la droite et du cercle dans le cas où  $m = 1$  ou  $m = 9$  ?*

D'après la question précédente, si  $m = 1$  ou  $m = 9$ , alors il y a un seul point d'intersection entre la droite et le cercle : la droite est tangente au cercle.