Exercice. On considère les trois fonctions suivantes, définies sur un domaine qui sera à déterminer.

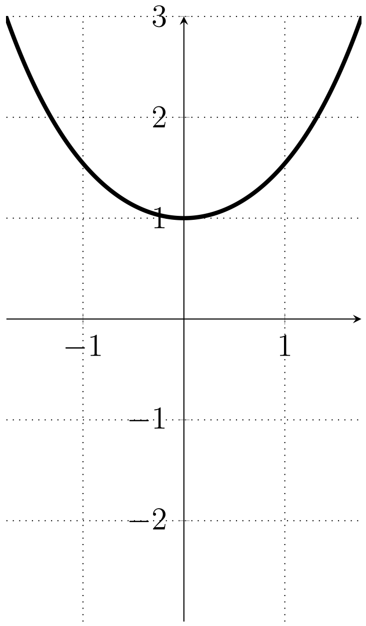
- Cosinus hyperbolique, noté cosh, et défini par : $\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$
- Sinus hyperbolique, noté sinh, et défini par : $\sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$
- Tangente hyperbolique, noté tanh, et définie par : $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$

Pour chacune de ces fonctions :

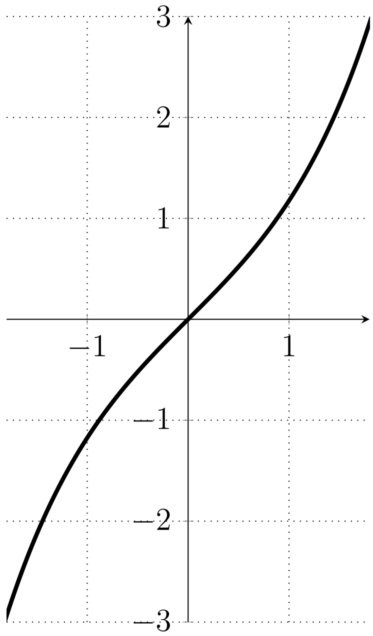
(a) Déterminer son domaine de définition.
(b) Dresser son tableau de signes.
(c) Dériver la fonction.
(d) Déterminer son tableau de variations.
(e) Déterminer les points d'intersection de sa courbe avec chacun des axes.

Corrigé.

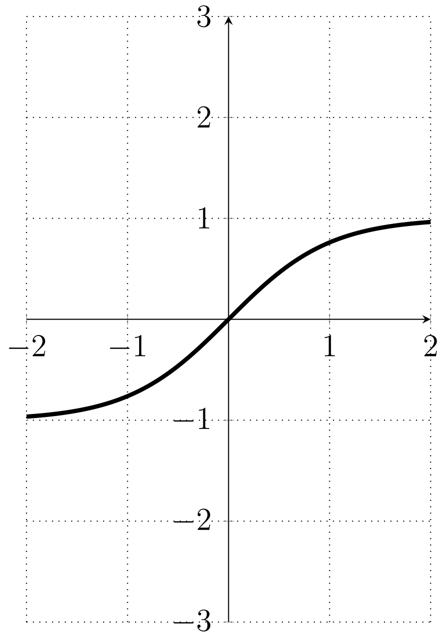
1. Courbes Commençons par tracer les trois courbes. Cela nous permettra de vérifier nos calculs par la suite.



Cosinus hyperbolique



Sinus hyperbolique



Tangente hyperbolique

2. Cosinus hyperbolique

   (a) Puisque l'exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$, le cosinus hyperbolique est également défini sur $\mathbb{R}$.
   (b) Puisque, pour toute valeur de x, $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$, alors $e^x + e^{-x} > 0$, et $\cosh x > 0$.

x	$-\infty$ $+\infty$
$\cosh x$	$+$

   (c) Puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la dérivée de l'exponentielle est elle-même, et la dérivée de $x \mapsto e^{-x}$ est $x \mapsto -e^{-x}$, alors :

$$\cosh' x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

   On remarque donc que la dérivée du cosinus hyperbolique est le sinus hyperbolique.

(d) Pour dresser le tableau de variations de cosh, dressons le tableau de signes de $\cosh'$. Commençons donc par résoudre $\cosh' x > 0$

$$\begin{aligned}
& \cosh' x > 0 \\
\iff & \sinh x > 0 \\
\iff & \frac{e^x - e^{-x}}{2} > 0 \\
\iff & e^x - e^{-x} > 0 \\
\iff & e^x > e^{-x} \\
\iff & \frac{e^x}{e^{-x}} > 1 \\
\iff & e^{x-(-x)} > 1 \\
\iff & e^{2x} > e^0 \\
\iff & 2x > 0 \\
\iff & x > 0
\end{aligned}$$

En remarquant que $\cosh 0 = \frac{e^0+e^{-0}}{2} = 1$, nous obtenons :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\cosh' x$		-		$+$	
cosh		$\searrow$	1	$\nearrow$	

(e) Puisque le cosinus hyperbolique est strictement positif, sa courbe n'a aucun point d'intersection avec l'axe des abscisses.
Puisque $\cosh 0 = 1$, la courbe coupe l'axe des ordonnées en $y = 1$.

3. Sinus hyperbolique

(a) Puisque l'exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$, le sinus hyperbolique est également défini sur $\mathbb{R}$.

(b) Nous avons déjà déterminé le signe de la fonction sinh, en tant que dérivée de la fonction cosh, à la question **??**.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\sinh x$		-	0	$+$	

(c) Puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la dérivée de l'exponentielle est elle-même, et la dérivée de $x \mapsto e^{-x}$ est $x \mapsto -e^{-x}$, alors :

$$\sinh' x = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

On remarque donc que la dérivée du sinus hyperbolique est le cosinus hyperbolique.

(d) Pour dresser le tableau de variations de sinh, dressons le tableau de signes de $\sinh'$, c'est-à-dire de cosh. Ce tableau a déjà été dressé à la question **??**.

x	$-\infty$		$+\infty$
$\sinh' x$		$+$	
sinh		$\nearrow$	

(e) Pour déterminer les points d'intersection de la courbe du sinus hyperbolique avec l'axe des abscisses, résolvons $\sinh x = 0$:

$$\begin{aligned} & \sinh x = 0 \\ \iff & \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 0 \\ \iff & e^x - e^{-x} = 0 \\ \iff & e^x = e^{-x} \\ \iff & x = -x \\ \iff & 2x = 0 \\ \iff & x = 0 \end{aligned}$$

La courbe du sinus hyperbolique coupe donc l'axe des abscisses une seule fois, en $x = 0$. Puisque $\sinh 0 = 0$, la courbe coupe l'axe des ordonnées en $y = 0$.

4. Tangente hyperbolique

(a) Puisque la tangente hyperbolique contient une division par $\cosh x$, elle est définie sur tous les nombres réels, sauf ceux qui annulent cosh. Mais le cosinus hyperbolique ne s'annule jamais, donc la fonction tangente hyperobolique est définie sur $\mathbb{R}$.

(b) Dressons le tableau de signes de la tangente hyperbolique, comme le rapport du sinus et du cosinus hyperbolique.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\sinh x$		-	0	$+$	
$\cosh x$		$+$		$+$	
$\tanh x$		-	0	$+$	

(c) Pour dériver la fonction tangente hyperbolique, nous allons utiliser : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-v'u}{v^2}$; $\cosh' x = \sinh x$; $\sinh' x = \cosh x$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \tanh' x &= \frac{\sinh' x \cosh x - \sinh x \cosh' x}{\cosh^2 x} \\ &= \frac{\cosh x \cosh x - \sinh x \sinh x}{\cosh^2 x} \\ &= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} \\ &= \frac{\cosh^2 x}{\cosh^2 x} - \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x} \\ &= 1 - \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right) \\ &= 1 - \tanh^2 x \end{aligned}$$

(d) Pour déterminer les variations de tanh, commençons par déterminer le signe de $\tanh'$. C'est un peu fastidieux, mais nous allons y arriver.
Commençons par montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\tanh x < 1$. Remarquons que puisque

l'exponentielle est toujours strictement positive, alors $e^{-x} > 0$ et $-e^{-x} < 0$, donc :

$$\begin{aligned}
& -e^{-x} < e^{-x} \\
\iff & e^x - e^{-x} < e^x + e^{-x} \\
\iff & \frac{e^x - e^{-x}}{2} < \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\
\iff & \sinh x < \cosh x \\
\iff & \frac{\sinh x}{\cosh x} < 1 \text{ car } \cosh x > 0 \\
\iff & \tanh x < 1
\end{aligned}$$

Montrons ensuite que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $1 < \tanh x$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, puisque $e^x > 0$, alors $-e^x < 0$, et donc :

$$\begin{aligned}
& e^x > -e^x \\
\iff & e^x - e^{-x} > -e^x - e^{-x} \\
\iff & e^x - e^{-x} > -\left(e^x + e^{-x}\right) \\
\iff & \frac{e^x - e^{-x}}{2} > -\frac{e^x + e^{-x}}{2} \\
\iff & \sinh x > -\cosh x \\
\iff & \frac{\sinh x}{\cosh x} > -1 \text{ car } \cosh x > 0 \\
\iff & \tanh x > -1
\end{aligned}$$

Nous venons de montrer que $-1 < \tanh x < 1$, donc $\tanh^2 x < 1$, et donc $0 < 1 - \tanh^2 x$. Donc $0 < \tanh' x$: la dérivée de la fonction tangente hyperbolique est toujours positive.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$\tanh' x$	$+$
$\tanh$	$\nearrow$

Remarque : il y avait une autre manière de faire. Il est possible de montrer, en revenant aux définitions des fonctions sinus et cosinus hyperboliques, que : $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$. Donc :

$$\tanh' x = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

Et donc $\tanh' x$ est toujours positif.
Cela demande plus de travail au départ (pour montrer que $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$), mais cela simplifie beaucoup la suite de la démonstration.

(e) Pour déterminer les points d'intersection de la courbe de la tangente hyperbolique avec l'axe des abscisses, résolvons $\tanh x = 0$:

$$\begin{aligned}
& \tanh = 0 \\
\iff & \frac{\sinh x}{\cosh x} = 0 \\
\iff & \sinh x = 0 \text{ en remarquant que } \cosh x \neq 0 \iff \qquad x = 0
\end{aligned}$$

Donc la courbe de la fonction tangente hyperbolique a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, en $x = 0$.
Enfin, puisque $\tanh 0 = \frac{\sinh 0}{\cosh 0} = \frac{0}{1} = 0$, alors la courbe de la fonction tangente hyperbolique coupe l'axe des ordonnées en $y = 0$.