L'objet de l'exercice est de tracer le tableau de variations de la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ *par* $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

1. *Montrer que pour tout* $x \in \mathbb{R}^*$*, on a :*

$$f'(x) = \frac{(x-1)\,e^x}{x^2}$$

On considère les fonctions u et v définies par $u(x) = e^x$, et $v(x) = x$. On a alors $u'(x) = e^x$, $v'(x) = 1$, et $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$. Donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} \\ &= \frac{(x-1)\,e^x}{x^2} \end{aligned}$$

2. *Dresser le tableau de signes de* f'*, et en déduire les variations de* f*.*
   - L'exponentielle est strictement positive, donc $e^x > 0$.
   - Un carré est toujours positif, donc $x^2 > 0$ (sauf pour $x = 0$, où $x^2 = 0$).
   - La fonction g_1 est affine, croissante, et change de signe lorsque $x - 1 = 0$, c'est-à-dire pour $x = 1$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g_1(x) = x - 1$		-		-	0	+	
$g_2(x) = e^x$		+		+		+	
$g_3(x) = x^2$		+	0	+		+	
$f'(x) = \frac{(x-1)x^x}{x^2}$		-	||	-	0	+	
f		↘	||	↘	e	↗	

On a calculé l'image de 1 ainsi : $f(1) = \frac{e^1}{1} = e$.

3. *Quels sont les extremums locaux de* f *sur son domaine de définition ?*

   D'après le tableau de variations, l'unique minimum local de f est e, atteint pour $x = 1$.