

**Exercice 1** (D'après l'exercice 1 du sujet de baccalauréat S, Antilles-Guyane, 18 juin 2019).

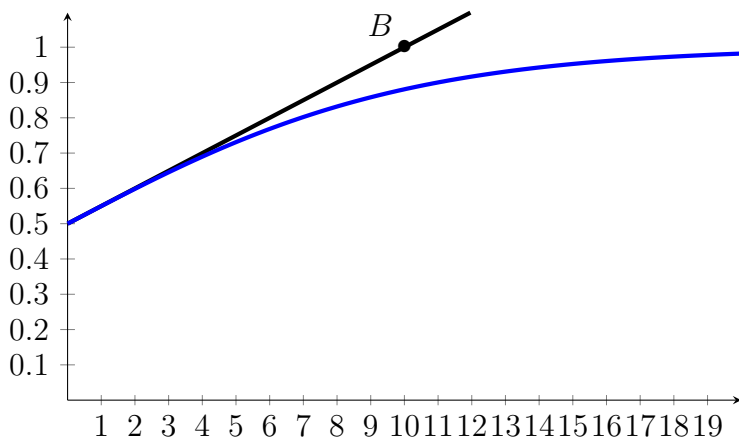
**Partie A**

Soit  $a$  et  $b$  des nombres réels. On considère une fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{a}{1 + e^{-bx}}.$$

La courbe  $\mathcal{C}_f$  représentant la fonction  $f$  dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.

La courbe  $\mathcal{C}_f$  passe par le point  $A(0; 0,5)$ . La tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point  $A$  passe par le point  $B(10; 1)$ .



1. Justifier que  $a = 1$ .

On obtient alors, pour tout réel  $x \geq 0$  :

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-bx}}.$$

2. On admet que la fonction  $f$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$  et on note  $f'$  sa fonction dérivée.

Vérifier que, pour tout réel  $x \geq 0$  :

$$f'(x) = \frac{be^{-bx}}{(1 + e^{-bx})^2}.$$

3. En utilisant les données de l'énoncé, déterminer  $b$ .

### Partie B

La proportion d'individus qui possèdent un certain type d'équipement dans une population est modélisée par la fonction  $p$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$$p(x) = \frac{1}{1 + e^{-0,2x}}.$$

Le réel  $x$  représente le temps écoulé, en année, depuis le 1<sup>er</sup> janvier 2000.

Le nombre  $p(x)$  modélise la proportion d'individus équipés après  $x$  années.

Ainsi, pour ce modèle,  $p(0)$  est la proportion d'individus équipés au 1<sup>er</sup> janvier 2000 et  $p(3, 5)$  est la proportion d'individus équipés au milieu de l'année 2003.

1. Quelle est, pour ce modèle, la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2010 ? On en donnera une valeur arrondie au centième.
2. (a) Déterminer le sens de variation de la fonction  $p$  sur  $[0; +\infty[$ .

(b) Calculer la limite de la fonction  $p$  en  $+\infty$ .

**▲** *Vous ne connaissez pas encore la limite. La question signifie : Lorsque  $x$  prend une valeur très très grande, de quelle valeur s'approche  $f(x)$  ? Ne donnez pas de réponse justifiée : faites une conjecture, et expliquez pourquoi vous la pensez vraie.*

(c) Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

3. On considère que, lorsque la proportion d'individus équipés dépasse 95 %, le marché est saturé.

Déterminer, en expliquant la démarche, l'année au cours de laquelle cela se produit.

4. On définit la proportion moyenne d'individus équipés entre 2008 et 2010 par

$$m = \frac{1}{2} \int_8^{10} p(x) \, dx.$$

**⊖** *Vous ne connaissez pas encore les intégrales (le symbole  $\int$ ) ni les primitives. Ne faites que la question 4a.*

(a) Vérifier que, pour tout réel  $x \geq 0$ ,

$$p(x) = \frac{e^{0,2x}}{1 + e^{0,2x}}.$$

(b) En déduire une primitive de la fonction  $p$  sur  $[0; +\infty[$ .

- (c) Déterminer la valeur exacte de  $m$  et son arrondi au centième.