

Tous les exercices sont ceux du chapitre 6 du manuel, à partir de la page 156.

Exercice (B).

1. D'après les règles de calcul, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\exp(x) > 0$, donc $f(x) > 0$. Donc dans la division $\frac{g(x)}{f(x)}$, on ne divise jamais par 0, donc la fonction h est bien définie.
2. La fonction h est la division de deux fonctions dérivables, et son dénominateur ne s'annule pas. Elle est donc dérivable elle aussi. Pour calculer la dérivée, on utilise le fait que puisque f et g sont deux fonctions qui vérifient les conditions, alors $f'(x) = f(x)$ et $g'(x) = g(x)$.

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{g'(x) \times f(x) - f'(x) \times g(x)}{(f(x))^2} \\ &= \frac{g(x) \times f(x) - f(x) \times g(x)}{(f(x))^2} \\ &= \frac{0}{(f(x))^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

3. Puisque $h'(x) = 0$ pour tout nombre x , alors la fonction h est une constante. De plus, puisque $f(0) = 1$ et $g(0) = 1$, alors :

$$h(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = \frac{1}{1} = 1$$

Donc, h est constante, et $h(0) = 1$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $h(x) = 1$.

4. Nous avons montré que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $h(x) = 1$. Donc $\frac{g(x)}{f(x)} = 1$, et $g(x) = 1 \times f(x) = f(x)$. Les fonctions f et g sont donc égales.

Nous avons montré que si deux fonctions vérifient les mêmes conditions $f(0) = 1$ et $f'(x) = f(x)$, alors elles sont égales. Donc *toutes* les fonctions vérifiant ces conditions sont égales. Il n'y a donc *qu'une seule* fonction vérifiant ces conditions.

Exercice 7. *Corrigé dans le manuel.*

Exercice 8. *Corrigé dans le manuel.*

Exercice 23.

1.

$$\begin{aligned} & \exp(3) \times [\exp(4)]^2 \\ &= \exp(3) \times \exp(4 \times 2) \\ &= \exp(3) \times \exp(8) \\ &= \exp(3 + 8) \\ &= \exp(11) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} & \exp(-10) \times \exp(6) \\ &= \exp(-10 + 6) \\ &= \exp(-4) \end{aligned}$$

Exercice 24.

1.

$$\begin{aligned} & [\exp(5)]^{-3} \\ &= \exp(5 \times (-3)) \\ &= \exp(-15) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{[\exp(12)]^{-4}} \\
 &= \frac{1}{\exp(12 \times (-4))} \\
 &= \frac{1}{\exp(-48)} \\
 &= \exp(48)
 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
 & \frac{\exp(2) \times [\exp(-6)]^2}{\exp(3)} \\
 &= \frac{\exp(2) \times \exp(-6 \times 2)}{\exp(3)} \\
 &= \frac{\exp(2) \times \exp(-12)}{\exp(3)} \\
 &= \frac{\exp(2 + (-12))}{\exp(3)} \\
 &= \frac{\exp(-10)}{\exp(3)} \\
 &= \exp(-10 - 3) \\
 &= \exp(-13)
 \end{aligned}$$

Exercice 25. À la calculatrice, on obtient :

1. 54,616

2. 7,525

Exercice 27. *Corrigé dans le manuel.*

Exercice 28. Pour vous montrer la méthode, j'appelle x l'inconnue dans chaque égalité.

1.

$$\begin{aligned}
 e^x \times e^7 \times e^{-2} &= e^3 \\
 e^{x+7+(-2)} &= e^3 \\
 e^{x+5} &= e^3
 \end{aligned}$$

Donc pour que l'égalité soit correcte, il faut que $x + 5 = 3$, donc $x = -2$.

2.

$$\begin{aligned} (e^3)^4 \times e^x &= e^3 \times e^{-1} \\ e^{3 \times 4} \times e^x &= e^{3-1} \\ e^{12} \times e^x &= e^2 \\ e^{12+x} &= e^2 \end{aligned}$$

Donc pour que l'égalité soit correcte, il faut que $12+x = 2$, donc $x = -10$.

3.

$$\begin{aligned} \frac{e^x}{e^3} &= e^{-1} \\ e^{x-3} &= e^{-1} \end{aligned}$$

Donc pour que l'égalité soit correcte, il faut que $x-3 = -1$, donc $x = 2$.

4.

$$\begin{aligned} \frac{e}{e^x} &= \frac{e^2}{e^5} \\ \frac{e^1}{e^x} &= \frac{e^2}{e^5} \\ e^{1-x} &= e^{2-5} \\ e^{1-x} &= e^{-3} \end{aligned}$$

Donc pour que l'égalité soit correcte, il faut que $1-x = -3$, donc $x = 4$.

Exercice 29. *Corrigé dans le manuel.*

Exercice 42.

1.

$$\begin{aligned} e^x (e^x + x) &= e^x \times e^x + e^x \times x \\ &= e^{x+x} + xe^x \\ &= e^{2x} + xe^x \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}(1 + e^x)^2 &= 1^2 + 2 \times 1 \times e^x + (e^x)^2 \\ &= 1 + 2e^x + e^{2x}\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}(2 - e^x)(2 + e^x) &= 2^2 - (e^x)^2 \\ &= 4 - e^{2x}\end{aligned}$$

Exercice 45. *Rappel : La dérivée de la fonction λu (où λ est un nombre, et u une fonction) est $(\lambda u)' = \lambda u'$.*

Puisque la dérivée de la fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ est elle-même, alors :

$$f'(x) = -2 \times e^x = -2e^x = f(x)$$

De plus :

$$f(0) = -2 \times e^0 = -2 \times 1 = -2$$

Exercice 46. La fonction $g : x \mapsto \frac{3}{2}e^x$ convient.