Exercice 1 (Inéquation). *On souhaite résoudre l'inéquation $e^{2x} + e^x - 2 \leqslant 0$.*

1. (a) *Dresser le tableau de signes du polynôme $X^2 + X - 2$.*

   Son discriminant est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$, soit strictement positif. Il y a donc deux solutions : $X_1 = \frac{-1-\sqrt{9}}{2\times1} = -2$ et $X_2 = \frac{-1+\sqrt{9}}{2\times1} = 1$.
   Le tableau de signes est donc :

X	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$X^2 + X - 2$		+	0	-	0	+	

   (b) *En déduire que $X^2 + X - 2 \leqslant 0$ pour $-2 \leqslant X \leqslant 1$.*

   En lisant le tableau de signes de la question précédent, on observe que $X^2 + X - 2 \leqslant 0$ pour $-2 \leqslant X \leqslant 1$.

2. *Déduire de la question précédente que $e^{2x} + e^x - 2 \leqslant 0$ si et seulement si $-2 \leqslant e^x \leqslant 1$.*

   On pose $X = e^x$. On observe que $e^{2x} = (e^x)^2 = X^2$. L'inéquation $e^{2x} + e^x - 2 \leqslant 0$ est alors équivalente à $X^2 + X - 2 \leqslant 0$, dont les solutions sont $-2 \leqslant X \leqslant 1$. Donc, puisque $X = e^x$, alors l'inéquation est équivalente à :

$$-2 \leqslant e^x \leqslant 1$$

3. *Résoudre $-2 \leqslant e^x$ et $e^x \leqslant 1$, et en déduire les solutions de l'inéquation de départ.*

   D'une part, $-2 \leqslant e^x$ est toujours vraie, car $e^x > 0$.

   D'autre part :

$$\begin{aligned} e^x &\leqslant 1 \\ e^x &\leqslant e^0 \\ x &\leqslant 0 \end{aligned}$$

   Donc $-2 \leqslant e^x \leqslant 1$ est équivalent à $\boxed{x \leqslant 0}$.

Exercice 2 (Étude de fonction)**.** *L'objet de l'exercice est de tracer le tableau de variations de la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{e^x}{x}$.*

1. *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :*

$$f'(x) = \frac{(x-1)\,e^x}{x^2}$$

   On considère les fonctions u et v définies par $u(x) = e^x$, et $v(x) = x$. On a alors $u'(x) = e^x$, $v'(x) = 1$, et $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$. Donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{\left(v(x)\right)^2} \\ &= \frac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} \\ &= \frac{(x-1)\,e^x}{x^2} \end{aligned}$$

2. *Dans un même tableau, donner le tableau de signes des trois fonctions définies par $g_1(x) = x - 1$, $g_2(x) = e^x$, $g_3(x) = x^2$, et en déduire que le signe de la dérivée f' est : ...*

   — L'exponentielle est strictement positive, donc $e^x > 0$.

   — Un carré est toujours positif, donc $x^2 > 0$ (sauf pour $x = 0$, où $x^2 = 0$).

   — La fonction g_1 est affine, croissante, et change de signe lorsque $x - 1 = 0$, c'est-à-dire pour $x = 1$.

   Voir le tableau à la question suivante.

3. *En déduire les variations de la fonction f.*

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g_1(x) = x - 1$		-		-	0	+	
$g_2(x) = e^x$		+		+		+	
$g_3(x) = x^2$		+	0	+		+	
$f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$		-	‖	-	0	+	
f		↘	‖	↘		↗	

4. *Quel est le minimum de f sur $\mathbb{R}^{+*}$?*
   D'après le tableau de variations, le minimum de f sur $\mathbb{R}^{+*}$ est égal à $f(1) = \frac{e^1}{1} = e$, atteint pour $x = 1$.