Exercice 1. *Écrire les nombres suivants sous la forme $a \times e^b$ (où a et b sont des nombres réels).*

$$\begin{aligned} A &= \left(e^{-4}\right)^2 \times e^3 \\ &= e^{-4\times 2} \times e^3 \\ &= e^{-8} \times e^3 \\ &= e^{-8+3} \\ &= e^{-5} \end{aligned}$$

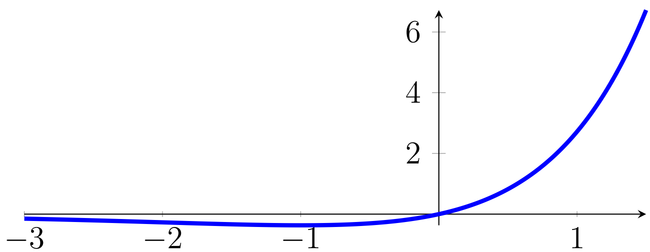
$$\begin{aligned} B &= \frac{e^5 + e^2 \times e^3}{e^4} \\ &= \frac{e^5 + e^{2+3}}{e^4} \\ &= \frac{e^5 + e^5}{e^4} \\ &= \frac{2e^5}{e^4} \\ &= 2e^{5-4} \\ &= 2e^1 \\ &= 2e \end{aligned}$$

Exercice 2. *On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = xe^x$$

On souhaite dresser les tableaux de signes et de variations de la fonction f.

1. Courbe représentative. *En utilisant la calculatrice, le logiciel Geogebra ou l'outils de votre choix, tracer la courbe de la fonction f. Recopier* l'allure *de cette courbe sur votre copie (la forme de la courbe sans précision, sans unités).*



2. *Tableau de signes* (a) *Dresser le tableau de signes des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}$.* (b) *En déduire le tableau de signes de la fonction f.* La fonction $x \mapsto x$ a les mêmes signes que l'abscisse x. D'après le cours, le nombre e^x est toujours positif, quel que soit x.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		-	0	$+$	
e^x		$+$		$+$	
$f(x) = x \times e^x$		-	0	$+$	

3. *Tableau de variations*
   (a) *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = (1+x)\,e^x$.* On sait que pour deux fonctions u et v, on a : $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$. Appliquons cela à la fonction f, avec $u(x) = x$ et $v(x) = e^x$. On a donc $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^x$ (car la dérivée de la fonction exponentielle est elle-même). Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times e^x + x \times e^x \\ &= (1+x)e^x \end{aligned}$$

   (b) *Dresser le tableau de signes des fonctions $x \mapsto 1+x$ et $x \mapsto e^x$.* La fonction $x \mapsto 1+x$ est affine de coefficient directeur strictement positif (donc strictement croissante), et elle s'annule en $x = -1$. D'autre part, comme expliqué plus haut, le nombre e^x est toujours strictement positif.

   Voir le tableau à la question 3d.

(c) *En déduire que le tableau de signes de la dérivée f' est le suivant.* Voir le tableau à la question suivante.

(d) *En déduire le tableau de variations de la fonction f.*

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$1 + x$		$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$	
$f'(x) = (1 + x) \times e^x$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	