*L'objet de l'exercice est de tracer le tableau de variations de la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{e^x}{x}$.*

1. *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :*

$$f'(x) = \frac{(x-1)\,e^x}{x^2}$$

On considère les fonctions $u$ et $v$ définies par $u(x) = e^x$, et $v(x) = x$. On a alors $u'(x) = e^x$, $v'(x) = 1$, et $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$. Donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} \\ &= \frac{(x-1)\,e^x}{x^2} \end{aligned}$$

2. *Dresser le tableau de signes de $f'$, et en déduire les variations de $f$.*

— L'exponentielle est strictement positive, donc $e^x > 0$.

— Un carré est toujours positif, donc $x^2 > 0$ (sauf pour $x = 0$, où $x^2 = 0$).

— La fonction $g_1$ est affine, croissante, et change de signe lorsque $x - 1 = 0$, c'est-à-dire pour $x = 1$.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g_1(x) = x - 1$ | | - | | - | $0$ | + | |
| $g_2(x) = e^x$ | | + | | + | | + | |
| $g_3(x) = x^2$ | | + | $0$ | + | | + | |
| $f'(x) = \frac{(x-1)x^x}{x^2}$ | | - | $\Vert$ | - | $0$ | + | |
| $f$ | | $\searrow$ | $\Vert$ | $\searrow$ | e | $\nearrow$ | |

On a calculé l'image de 1 ainsi : $f(1) = \frac{e^1}{1} = e$.

3. *Quels sont les extremums locaux de $f$ sur son domaine de définition ?*

D'après le tableau de variations, l'unique minimum local de $f$ est $e$, atteint pour $x = 1$.