Exercice 1 (D'après l'exercice 2 du sujet du sujet 1 d'E3C 2 — Première générale — Spécialité mathématiques)**.** *Une entreprise pharmaceutique fabrique un soin antipelliculaire. Elle peut produire entre 200 et 2 000 litres de produit par semaine. Le résultat, en dizaines de milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de x centaines de litres est donné par la fonction R définie par :*

$$R(x) = (5x - 30)e^{-0,25x} \text{ pour tout réel } x \in [2; 20].$$

1. *Calculer le résultat réalisé par la fabrication et la vente de 7 centaines de litres de produit. On l'arrondira à l'euro près.*

$$\begin{aligned} R(7) &= (5 \times 7 - 30)\, e^{-0,25 \times 7} \\ &\approx 0,868\,9 \end{aligned}$$

   Donc le résultat pour la vente de 7 centaines de litres de produit est 0,868 9 dizaines de milliers d'euros environ, soit 8 689 euros environ.

2. *Vérifier que pour la fabrication et la vente de 400 litres de produit, l'entreprise réalise un résultat négatif (appelé déficit).*

$$\begin{aligned} R(4) &= (5 \times 4 - 30)\, e^{-0,25 \times 4} \\ &\approx -3,7 \end{aligned}$$

   Donc $R(4) < 0$: le résultat pour la vente de 400 litres de produit est négatif.

3. *Résoudre l'inéquation $R(x) > 0$, d'inconnue x. Interpréter dans le contexte de l'exercice.*

   Remarquons qu'une exponentielle est toujours strictement positive, et que $x \mapsto 5x - 30$ est une fonction affine.

x	2		6		20
$5x - 30$		$-$	0	$+$	
$e^{-0,25x}$		$+$		$+$	
$R(x) = (5x - 30)e^{-0,25x}$		$-$	0	$+$	

Donc les solutions de $R(x) > 0$ sont $x \in]6;20]$. En d'autres termes, le résultat sera positif à partir de 600 litres de produit fabriqués et vendus.

4. *Calculer l'expression de la dérivée R' de la fonction R.*
En déduire la quantité de produit que l'entreprise doit produire et vendre pour réaliser le résultat maximal.
On pose, pour tout $x \in [2;20]$:
$$u(x) = 5x - 30 \text{ et } v(x) = e^{-0,25x}$$
Donc :
$$u'(x) = 5 \text{ et } v'(x) = -0,25e^{-0,25x}$$
Et ainsi :
$$\begin{aligned} R'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ &= 5e^{-0,25x} + (5x-30) \times (-0,25)e^{-0,25x} \\ &= (5 + (5x-30) \times (-0,25))\, e^{-0,25x} \\ &= (5 - 1,25x + 7,5)\, e^{-0,25x} \\ &= (12,5 - 1,25x)\, e^{-0,25x} \end{aligned}$$
Dressons le tableau de signes de $R'(x)$, pour en déduire les variations de R.

x	2		10		20
$12,5 - 1,25x$		$+$	0	$-$	
$e^{-0,25x}$		$+$		$+$	
$R'(x) = (12,5-1,25x)e^{-0,25x}$		$+$	0	$-$	
R		$\nearrow$		$\searrow$	

Le résultat maximal est donc atteint pour la fabrication et la vente de 10 centaines de litres de produit, soit 1 000 litres.