

Exercice 1. Dans un repère orthonormé, on a la droite d'équation $3x + 5y + 1 = 0$, et le point $A(6; 3)$ (on admet que A n'est pas sur la droite d). On appelle H le projeté orthogonal de A sur d . Déterminer les coordonnées de H .

Exercice (Corrigé). Appelons $H(x; y)$ les coordonnées de H .

Puisque H est le projeté orthogonal de A sur d , alors le segment $[AH]$ est perpendiculaire à d . Donc les vecteurs $\overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} x-6 \\ y-3 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ (vecteur directeur de d) sont orthogonaux, donc leur produit scalaire est nul :

$$\begin{aligned} -5 \times (x - 6) + 3 \times (y - 3) &= 0 \\ -5x + 30 + 3y - 9 &= 0 \\ -5x + 3y + 21 &= 0 \end{aligned}$$

(Remarque qui n'est pas nécessaire à la résolution de l'exercice :
l'équation $-5x + 3y + 21 = 0$ que nous venons de calculer est une
équation cartésienne de la droite passant par A , perpendiculaire
à d .)

D'autre part, le point H est sur la droite d , donc ses coordonnées vérifient l'équation de la droite d : $3x + 5y + 1 = 0$.

Les coordonnées du point H sont donc la (les ?) solution du système suivant :

$$\begin{aligned} L_1 & \begin{cases} 3x + 5y + 1 = 0 \\ -5x + 3y + 21 = 0 \end{cases} \\ L'_1 = 5L_1 & \begin{cases} 15x + 25y + 5 = 0 \\ -15x + 9y + 63 = 0 \end{cases} \\ L'_2 = 3L_2 & \begin{cases} 34y + 68 = 0 \\ -15x + 9y + 63 = 0 \end{cases} \\ L'_1 + L'_2 & \begin{cases} 34y + 68 = 0 \\ -15x + 9y + 63 = 0 \end{cases} \\ L'_2 & \begin{cases} 34y = -68 \\ -15x + 9y + 63 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y = -2 \\ -15x + 9 \times (-2) + 63 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2 \\ -15x + 45 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2 \\ -15x = -45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2 \\ x = 3 \end{cases}$$

Donc les coordonnées de H sont $H\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$.

Exercice 2. *Katia veut prendre en photo un train depuis le sommet d'une colline, au moment où le train est le plus proche d'elle.*

Dans un repère orthonormé approprié, le train se déplace en ligne droite selon la droite t d'équation $2x - 3y - 3 = 0$, et Katia est située en $K(5; -2)$. On cherche les coordonnées du point M , le point de la droite le plus proche de K .

1. *Justifier que M est le projeté orthogonal de K sur t .*
2. *Déterminer les coordonnées de M .*

Exercice (Corrigé).

1. *Justifier que M est le projeté orthogonal de K sur t .*

Puisque M est le point de la droite le plus proche de K , alors c'est le projeté orthogonal de K sur la droite.

2. *Déterminer les coordonnées de M .*

Soient $M(x; y)$ les coordonnées de M . Ce point est le projeté orthogonal de K sur t , donc le segment $[KM]$ est perpendiculaire à

la droite, et les vecteurs $\overrightarrow{KM} \begin{pmatrix} x-5 \\ y+2 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ (vecteur directeur de t) sont orthogonaux, donc leur produit scalaire est nul :

$$\begin{aligned} (x-5) \times 3 + (y+2) \times 2 &= 0 \\ 3x - 15 + 2y + 4 &= 0 \\ 3x + 2y - 11 &= 0 \end{aligned}$$

D'autre part, le point $M(x; y)$ est sur la droite t , donc ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne $2x - 3y - 3 = 0$ de la droite.

Nous cherchons donc les solutions du système suivant.

$$\begin{aligned} L_1 & \begin{cases} 3x + 2y - 11 = 0 \\ 2x - 3y - 3 = 0 \end{cases} \\ L'_1 = 2L_1 & \begin{cases} 6x + 4y - 22 = 0 \\ 6x - 9y - 9 = 0 \end{cases} \\ L'_2 = 3L_2 & \begin{cases} 4y - (-9y) - 22 - (-9) = 0 \\ 6x - 9y - 9 = 0 \end{cases} \\ L'_1 - L'_2 & \begin{cases} 13y - 13 = 0 \\ 6x - 9y - 9 = 0 \end{cases} \\ & \begin{cases} y = 1 \\ 6x - 9 \times 1 - 9 = 0 \end{cases} \\ & \begin{cases} y = 1 \\ 6x - 18 = 0 \end{cases} \\ & \begin{cases} y = 1 \\ x = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Les coordonnées du point M sont donc $\boxed{M \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}$.

Exercice 3. On donne le point $A(3;2)$. L'objet de l'exercice est de déterminer le lieu géométrique des points à égale distance de A et de l'axe des abscisses (c'est-à-dire caractériser l'ensemble des points vérifiant cette condition). Soit $M(x; y)$ un point situé à égale distance de A et de l'axe des abscisses.

Exercice (Corrigé).

1. Justifier que $AM^2 = x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13$.

On a :

$$\begin{aligned} AM &= \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2} \\ AM &= \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 2)^2} \\ AM^2 &= (x - 3)^2 + (y - 2)^2 \\ AM^2 &= x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 \\ AM^2 &= x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13 \end{aligned}$$

2. On appelle d la distance de M à l'axe des abscisses. Justifier que $d^2 = y^2$ (attention : bien prendre en compte le cas où M est situé sous l'axe des abscisses).

Puisque les coordonnées de M sont $M(x; y)$, alors $K(x; 0)$ est le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses (en effet, K est sur l'axe des abscisses, et $[MK]$ est perpendiculaire à l'axe des abscisses).

Donc la distance de M à l'axe des abscisses est $d = MK$.

$$\begin{aligned} d &= MK \\ d^2 &= MK^2 \\ d^2 &= \sqrt{(x_K - x_M)^2 + (y_K - y_M)^2} \\ d^2 &= (x_K - x_M)^2 + (y_K - y_M)^2 \\ d^2 &= (x - x)^2 + (0 - y)^2 \\ d^2 &= y^2 \end{aligned}$$

3. En déduire que $y^2 = x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13$, puis que $y = 0, 25x^2 - 1, 5x + 3, 25$.

Puisque le point M est à la même distance de A et de l'axe des abscisses, alors $d = AM$, et $d^2 = AM^2$.

$$\begin{aligned} d^2 &= AM^2 \\ y^2 &= x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13 \\ y^2 - y^2 + 4y &= x^2 - 6x + 13 \\ 4y &= x^2 - 6x + 13 \\ y &= \frac{x^2}{4} - \frac{6}{4}x + \frac{13}{4} \\ y &= 0, 25x^2 - 1, 5x + 3, 25 \end{aligned}$$

4. Comment appelle-t-on la forme prise par l'ensemble des points à égale distance de A et de l'axe des abscisses ?

L'ensemble des points dont les coordonnées vérifient $y = 0, 25x^2 - 1, 5x + 3, 25$ est une parabole.

Exercice 4. Dans un repère orthonormé, on considère le cercle de centre $I(5; 3)$ et de rayon 4, et la droite d_m , d'équation $x = m$ (où m est un nombre réel quelconque).

L'objet de l'exercice est de déterminer le nombre de points d'intersection entre la droite et le cercle en fonction de m .

0. Avec quel axe la droite d_m est-elle parallèle ?

Soit $M(x; y)$ un point d'intersection du cercle et de la droite.

1. Justifier que $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 16$.
2. En déduire que $y^2 - 6y + m^2 - 10m + 18 = 0$.

Pour chercher la valeur de y , il faut donc résoudre l'équation ci-dessus, qui est un trinôme du second degré. Appelons Δ_m son discriminant.

3. Montrer que $\Delta_m = -4m^2 + 40m - 36$.

4. Montrer que le tableau de signes de Δ_m en fonction de m est le suivant.

m	$-\infty$	1	9	$+\infty$	
Δ_m	$-$	0	$+$	0	$-$

5. En déduire le nombre de points d'intersection entre le cercle et la droite en fonction de m .
6. Quelle est la position relative de la droite et du cercle dans le cas où $m = 1$ ou $m = 9$?

Exercice (Corrigé).

0. Avec quel axe la droite d_m est-elle parallèle ?

Puisque l'équation réduite de la droite est de la forme $x = m$, alors la droite est parallèle à l'axe des ordonnées.

Soit $M(x; y)$ un point d'intersection du cercle et de la droite.

1. Justifier que $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 16$.

Puisque M est sur le cercle de centre $I(5; 3)$ et de rayon 4, alors :

Méthode 1. On applique le théorème du cours :

$$\begin{aligned}(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 &= 4^2 \\ (x - 5)^2 + (y - 3)^2 &= 16\end{aligned}$$

Méthode 2. Le segment $[IM]$ est un rayon du cercle, donc $IM = 4$:

$$\begin{aligned}\sqrt{(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2} &= 4 \\ \sqrt{(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2} &= 4^2 \\ (x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 &= 16 \\ (x - 5)^2 + (y - 3)^2 &= 16\end{aligned}$$

2. En déduire que $y^2 - 6y + m^2 - 10m + 18 = 0$.

D'une part, d'après la question précédente, on a : $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 16$. D'autre part, puisque le point M est aussi sur la droite d , alors $x = m$. Remplaçons donc x par m dans l'équation précédente :

$$\begin{aligned}(m - 5)^2 + (y - 3)^2 &= 16 \\ m^2 - 10m + 25 + y^2 - 6y + 9 - 16 &= 0 \\ y^2 - 6y + m^2 - 10m + 18 &= 0\end{aligned}$$

Pour chercher la valeur de y , il faut donc résoudre l'équation ci-dessus, qui est un trinôme du second degré (d'inconnue y). Appelons Δ_m son discriminant.

3. Montrer que $\Delta_m = -4m^2 + 40m - 36$.

L'expression $y^2 - 6y + m^2 - 10m + 18 = 0$ est un trinôme du second degré :

$$\underbrace{y^2}_{a=1} \underbrace{-6y}_{b=-6} + \underbrace{m^2 - 10m + 18}_{c=m^2 - 10m + 18}$$

Son discriminant est :

$$\begin{aligned}\Delta_m &= b^2 - 4ac \\ &= (-6)^2 - 4 \times 1 \times (m^2 - 10m + 18) \\ &= 36 - 4m^2 + 40m - 72 \\ &= -4m^2 + 40m - 36\end{aligned}$$

4. Montrer que le tableau de signes de Δ_m en fonction de m est le suivant.

Le discriminant $\Delta_m = \underbrace{-4}_{a=-4} m^2 + \underbrace{40}_{b=40} m - \underbrace{36}_{c=-36}$ est lui même un tri-

nôme du second degré, d'inconnue m . Son discriminant est :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 40^2 - 4 \times (-4) \times (-36) \\ &= 1024\end{aligned}$$

Il y a donc deux racines : $m_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-40-\sqrt{1024}}{2 \times (-4)} = 9$ et $m_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-40+\sqrt{1024}}{2 \times (-4)} = 1$. On a donc le tableau de signes suivant :

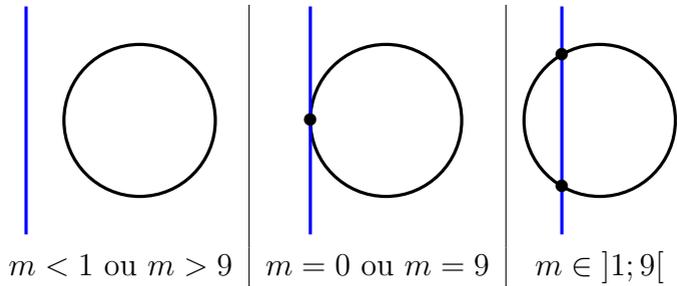
m	$-\infty$	1	9	$+\infty$		
Δ_m		-	0	+	0	-

5. *En déduire le nombre de points d'intersection entre le cercle et la droite en fonction de m .*

En lisant le tableau de signes, on observe :

- si $m < 1$ ou $m > 9$, alors Δ_m est strictement négatif, donc l'équation $y^2 - 6y + m^2 - 10m + 18 = 0$ n'a pas de solutions, donc il n'y a aucun points d'intersection entre la droite et le cercle ;
- si $m = 1$ ou $m = 9$, alors Δ_m est égal à zéro, donc l'équation $y^2 - 6y + m^2 - 10m + 18 = 0$ a une unique solution, donc il y a un seul point d'intersection entre la droite et le cercle ;
- si $m \in]1; 9[$, alors Δ_m est strictement positif, donc l'équation $y^2 - 6y + m^2 - 10m + 18 = 0$ a deux solutions solutions, donc il y a deux points d'intersection entre la droite et le cercle.

Ces différents cas sont illustrés ci-dessous :



6. *Quelle est la position relative de la droite et du cercle dans le cas où $m = 1$ ou $m = 9$?*

D'après la question précédente, si $m = 1$ ou $m = 9$, alors il y a un seul point d'intersection entre la droite et le cercle : la droite est tangente au cercle.