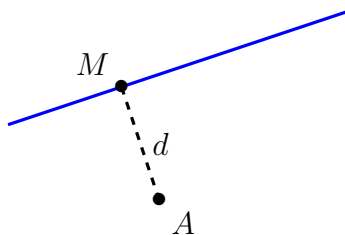


Lisez et comprenez ce document.

Définition et Propriété. On appelle distance d'un point A à une droite la plus petite distance entre un point de cette droite et A . Cette distance est obtenue avec le projeté orthogonal de A sur la droite.



Exemple. Soit $A(2; 8)$ un point du plan muni d'un repère orthonormé, et d la droite d'équation $3x - 4y + 8 = 0$. Quelle est la distance de A à d ?

Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ le projeté orthogonal de A sur la droite d . Il faut donc calculer la distance AM . Soit \vec{n} un vecteur normal à la droite : calculons la valeur absolue du produit scalaire $|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|$ de deux manières différentes.

Remarquons d'abord que puisque l'équation de la droite est $3x - 4y + 8 = 0$, alors nous pouvons prendre $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ comme vecteur normal.

- D'une part, puisque M est le projeté orthogonal de A sur la droite, alors \overrightarrow{AM} est un vecteur normal à la droite, donc \overrightarrow{AM} et \vec{n} sont colinéaires. Donc $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = \|\overrightarrow{AM}\| \times \|\vec{n}\|$ ou $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = -\|\overrightarrow{AM}\| \times \|\vec{n}\|$. Mais puisque seule la valeur absolue nous intéresse, nous pouvons affirmer que :

$$\begin{aligned}
 |\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}| &= \|\overrightarrow{AM}\| \times \|\vec{n}\| \\
 &= AM \times \|\vec{n}\| \\
 &= AM \times \sqrt{a^2 + b^2} \\
 &= AM \times \sqrt{3^2 + (-4)^2} \\
 &= 5AM
 \end{aligned}$$

— D'autre part, puisque les coordonnées de A sont $A\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 8 \end{smallmatrix}\right)$, alors $\overrightarrow{AM}\left(\begin{smallmatrix} x-2 \\ y-8 \end{smallmatrix}\right)$, et donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} &= (x-2) \times 3 + (y-8) \times (-4) \\ &= 3x - 6 - 4y + 32 \\ &= 3x - 4y + 26\end{aligned}$$

Ensuite, puisque le point M est sur la droite, alors ses coordonnées vérifient l'équation de la droite $3x - 4y + 8 = 0$, donc $3x - 4y = -8$:

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 3x - 4y + 26 = -8 + 26 = 18$$

Et donc $|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}| = |18| = 18$.

Nous avons montré, d'une part, que $|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}| = 5AM$, et d'autre part, que $|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}| = 18$. Donc :

$$\begin{aligned}5AM &= 18 \\ AM &= \frac{18}{5} \\ AM &= 3,6\end{aligned}$$

La distance de A à la droite est donc 3,6.