— *Tous les exercices sont ceux des chapitres 9 et 10 du manuel, à partir de des pages 229 et 253.*
— *Toutes les vidéos sont celles d'Yves Monka. Merci à lui.*

Pas de cours cette semaine : seulement des exercices de fin de chapitre.

Coordonnées du projeté orthogonal

1. *Au choix : lisez et comprenez l'exercice 1 corrigé, ou regardez la vidéo :* **`http://youtu.be/-HNUbyU72Pc`***.*
2. *Faites l'exercice 2.*

Exercice 1 (Exercice corrigé)**.** *Dans un repère orthonormé, on a d la droite d'équation* $3x+5y+1=0$*, et le point* $A(6;3)$ *(on admet que* A *n'est pas sur la droite* d*). On appelle* H *le projeté orthogonal de* A *sur* d*. Déterminer les coordonnées de* H*.*

Appelons $H(x;y)$ les coordonnées de H.
Puisque H est le projeté orthogonal de A sur d, alors le segment $[AH]$ est perpendiculaire à d. Donc les vecteurs $\overrightarrow{AH}\binom{x-6}{y-3}$ et $\overrightarrow{u}\binom{-5}{3}$ (vecteur directeur de d) sont orthogonaux, donc leur produit scalaire est nul :

$$\begin{aligned} -5\times(x-6)+3\times(y-3)&=0\\ -5x+30+3y-9&=0\\ -5x+3y+21&=0 \end{aligned}$$

$$\left(\text{Remarque qui n'est pas nécessaire à la résolution de l'exercice : l'équation } -5x+3y+21=0 \text{ que nous venons de calculer est une équation cartésienne de la droite passant par } A\text{, perpendiculaire à } d.\right)$$

D'autre part, le point H est sur la droite d, donc ses coordonnées vérifient l'équation de la droite d : $3x + 5y + 1 = 0$. Les coordonnées du point H sont donc la (les ?) solution du système suivant :

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \quad \begin{cases} 3x+5y+1=0 \\ -5x+3y+21=0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L'_1 = 5L_1 \\ L'_2 = 3L_2 \end{matrix} \quad \begin{cases} 15x+25y+5=0 \\ -15x+9y+63=0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L'_1 + L'_2 \\ L'_2 \end{matrix} \quad \begin{cases} 34y+68=0 \\ -15x+9y+63=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 34y=-68 \\ -15x+9y+63=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-2 \\ -15x+9\times(-2)+63=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-2 \\ -15x+45=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-2 \\ -15x=-45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-2 \\ x=3 \end{cases}$$

Donc les coordonnées de H sont $H\binom{3}{-2}$.

Exercice 2. Katia veut prendre en photo un train depuis le sommet d'une colline, au moment où le train est le plus proche d'elle.
Dans un repère orthonormé approprié, le train se déplace en ligne droite selon la droite t d'équation $2x - 3y - 3 = 0$, et Katia est située en $K\,(5; -2)$. On cherche les coordonnées du point M, le point de la droite le plus proche de K.

1. Justifier que M est le projeté orthogonal de K sur t.
2. Déterminer les coordonnées de M.

Lieu géométrique

Exercice 3. On donne le point $A(3; 2)$. L'objet de l'exercice est de déterminer le *lieu géométrique* des points à égale distance de A et de l'axe des abscisses (c'est-à-dire caractériser l'ensemble des points vérifiant cette condition). Soit $M(x; y)$ un point situé à égale distance de A et de l'axe des abscisses.

1. Justifier que $AM^2 = x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13$.
2. On appelle d la distance de M à l'axe des abscisses. Justifier que $d^2 = y^2$ (attention : bien prendre en compte le cas où M est situé sous l'axe des abscisses).
3. En déduire que $y^2 = x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13$, puis que $y = 0,25x^2 - 1,5x + 3,25$.
4. Comment appelle-t-on la forme prise par l'ensemble des points à égale distance de A et de l'axe des abscisses ?

Intersection d'un cercle et d'une droite

Exercice 4. Dans un repère orthonormé, on considère le cercle de centre $I(5;3)$ et de rayon 4, et la droite d_m, d'équation $x = m$ (où m est un nombre réel quelconque).
L'objet de l'exercice est de déterminer le nombre de points d'intersection entre la droite et le cercle en fonction de m.

0. Avec quel axe la droite d_m est-elle parallèle ?

Soit $M(x;y)$ un point d'intersection du cercle et de la droite.

1. Justifier que $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 16$.
2. En déduire que $y^2 - 6y + m^2 - 10m + 18 = 0$.

Pour chercher la valeur de y, il faut donc résoudre l'équation ci-dessus, qui est un trinôme du second degré. Appelons Δ_m son discriminant.

3. Montrer que $\Delta_m = -4m^2 + 40m - 36$.
4. Montrer que le tableau de signes de Δ_m en fonction de m est le suivant.

m	$-\infty$		1		9		$+\infty$
Δ_m		$-$	0	$+$	0	$-$	

5. En déduire le nombre de points d'intersection entre le cercle et la droite en fonction de m.
6. Quelle est la position relative de la droite et du cercle dans le cas où $m = 1$ ou $m = 9$?