Exercice 1. Corrigé dans l'énoncé.

Exercice 2. *Katia veut prendre en photo un train depuis le sommet d'une colline, au moment où le train est le plus proche d'elle.*
Dans un repère orthonormé approprié, le train se déplace en ligne droite selon la droite t d'équation $2x - 3y - 3 = 0$, et Katia est située en $K\,(5; -2)$. On cherche les coordonnées du point M, le point de la droite le plus proche de K.

1. *Justifier que M est le projeté orthogonal de K sur t.*
   Puisque M est le point de la droite le plus proche de K, alors c'est le projeté orthogonal de K sur la droite.
2. *Déterminer les coordonnées de M.*
   Soient $M(x; y)$ les coordonnées de M. Ce point est le projeté orthogonal de K sur t, donc le segment $[KM]$ est perpendiculaire à la droite, et les vecteurs $\overrightarrow{KM}\binom{x-5}{y+2}$ et $\overrightarrow{u}\binom{3}{2}$ (vecteur directeur de t) sont orthogonaux, donc leur produit scalaire est nul :

$$\begin{aligned}(x-5)\times 3 + (y+2)\times 2 &= 0\\ 3x - 15 + 2y + 4 &= 0\\ 3x + 2y - 11 &= 0\end{aligned}$$

   D'autre part, le point $M(x; y)$ est sur la droite t, donc ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne $2x - 3y - 3 = 0$ de la droite.
   Nous cherchons donc les solutions du système suivant.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \quad \begin{cases} 3x + 2y - 11 = 0 \\ 2x - 3y - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_1' = 2L_1 \\ L_2' = 3L_2 \end{matrix} \quad \begin{cases} 6x + 4y - 22 = 0 \\ 6x - 9y - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} L'_1 - L'_2 \\ L'_2 \end{array} \quad \begin{cases} 4y - (-9y) - 22 - (-9) = 0 \\ 6x - 9y - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 13y - 13 = 0 \\ 6x - 9y - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ 6x - 9 \times 1 - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ 6x - 18 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Les coordonnées du point M sont donc $\boxed{M\binom{3}{1}}$.

Exercice 3. *On donne le point $A(3;2)$. L'objet de l'exercice est de déterminer le* lieu géométrique *des points à égale distance de A et de l'axe des abscisses (c'est-à-dire caractériser l'ensemble des points vérifiant cette condition). Soit $M(x;y)$ un point situé à égale distance de A et de l'axe des abscisses.*

1. *Justifier que $AM^2 = x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13$.*

   On a :

$$\begin{aligned} AM &= \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2} \\ AM &= \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} \\ AM^2 &= (x-3)^2 + (y-2)^2 \\ AM^2 &= x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 \\ AM^2 &= x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13 \end{aligned}$$

2. *On appelle d la distance de M à l'axe des abscisses. Justifier que $d^2 = y^2$ (attention : bien prendre en compte le cas où M est situé sous l'axe des abscisses).*

   Puisque les coordonnées de M sont $M(x;y)$, alors $K(x;0)$ est le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses (en effet, K est sur l'axe des abscisses, et $[MK]$ est perpendiculaire à l'axe des abscisses).

   Donc la distance de M à l'axe des abscisses est $d = MK$.

$$\begin{aligned} d &= MK \\ d^2 &= MK^2 \\ d^2 &= \sqrt{(x_K - x_M)^2 + (y_K - y_M)^2}^2 \\ d^2 &= (x_K - x_M)^2 + (y_K - y_M)^2 \\ d^2 &= (x - x)^2 + (0 - y)^2 \\ d^2 &= y^2 \end{aligned}$$

3. *En déduire que $y^2 = x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13$, puis que $y = 0,25x^2 - 1,5x + 3,25$.*

   Puisque le point M est à la même distance de A et de l'axe des abscisses, alors $d = AM$, et $d^2 = AM^2$.

$$\begin{aligned} d^2 &= AM^2 \\ y^2 &= x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13 \\ y^2 - y^2 + 4y &= x^2 - 6x + 13 \\ 4y &= x^2 - 6x + 13 \\ y &= \frac{x^2}{4} - \frac{6}{4}x + \frac{13}{4} \\ y &= 0,25x^2 - 1,5x + 3,25 \end{aligned}$$

4. *Comment appelle-t-on la forme prise par l'ensemble des points à égale distance de A et de l'axe des abscisses ?*
   L'ensemble des points dont les coordonnées vérifient $y = 0,25x^2 - 1,5x + 3,25$ est $\boxed{\text{une parabole}}$.

Exercice 4. *Dans un repère orthonormé, on considère le cercle de centre $I(5;3)$ et de rayon 4, et la droite d_m, d'équation $x = m$ (où m est un nombre réel quelconque).*
L'objet de l'exercice est de déterminer le nombre de points d'intersection entre la droite et le cercle en fonction de m.

0. *Avec quel axe la droite d_m est-elle parallèle ?*
   Puisque l'équation réduite de la droite est de la forme $x = m$, alors la droite est parallèle à l'axe des ordonnées.

Soit $M(x;y)$ un point d'intersection du cercle et de la droite.

1. *Justifier que $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 16$.*
   Puisque M est sur le cerle de centre $I\,(5;3)$ et de rayon 4, alors :
   Méthode 1. On applique le théorème du cours :
   $$(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 = 4^2$$
   $$(x-5)^2 + (y-3)^2 = 16$$
   Méthode 2. Le segment $[IM]$ est un rayon du cercle, donc $IM = 4$:
   $$\sqrt{(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2} = 4$$
   $$\sqrt{(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2}^2 = 4^2$$
   $$(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 = 16$$
   $$(x-5)^2 + (y-3)^2 = 16$$

2. *En déduire que $y^2 - 6y + m^2 - 10m + 18 = 0$.*
   D'une part, d'après la question précédente, on a : $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 16$. D'autre part, puisque le point M est aussi sur la droite d, alors $x = m$. Remplaçons donc x par m dans l'équation précédente :

$$\begin{aligned} (m-5)^2 + (y-3)^2 &= 16 \\ m^2 - 10m + 25 + y^2 - 6y + 9 - 16 &= 0 \\ y^2 - 6y + m^2 - 10m + 18 &= 0 \end{aligned}$$

Pour chercher la valeur de y, il faut donc résoudre l'équation ci-dessus, qui est un trinôme du second degré (d'inconnue y). Appelons Δ_m son discriminant.

3. *Montrer que $\Delta_m = -4m^2 + 40m - 36$.*
   L'expression $y^2 - 6y + m^2 - 10m + 18 = 0$ est un trinôme du second degré :

$$\underbrace{y^2}_{a=1} \underbrace{-6y}_{b=-6} \underbrace{+m^2 - 10m + 18}_{c=m^2-10m+18}$$

   Son discriminant est :

$$\begin{aligned} \Delta_m &= b^2 - 4ac \\ &= (-6)^2 - 4 \times 1 \times \left(m^2 - 10m + 18\right) \\ &= 36 - 4m^2 + 40m - 72 \\ &= -4m^2 + 40m - 36 \end{aligned}$$

4. *Montrer que le tableau de signes de Δ_m en fonction de m est le suivant.*
   Le discriminant $\Delta_m = \underbrace{-4}_{a=-4} m^2 \underbrace{+40}_{b=40} m \underbrace{-36}_{c=-36}$ est lui même un trinôme du second degré, d'inconnue m. Son discri-

minant est :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 40^2 - 4 \times (-4) \times (-36) \\ &= 1024\end{aligned}$$

Il y a donc deux racines : $m_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-40-\sqrt{1024}}{2\times(-4)} = 9$ et $m_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-40+\sqrt{1024}}{2\times(-4)} = 1$. On a donc le tableau de signes suivant :

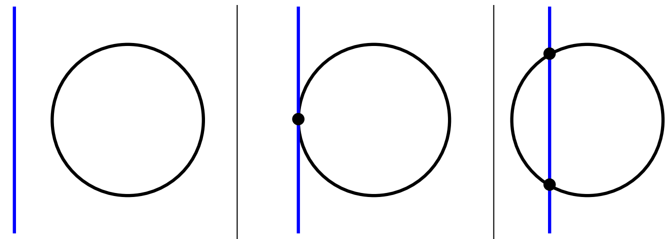
m	$-\infty$		1		9		$+\infty$
Δ_m		$-$	0	$+$	0	$-$	

5. *En déduire le nombre de points d'intersection entre le cercle et la droite en fonction de m.*

   En lisant le tableau de signes, on observe :

   - si $m < 1$ ou $m > 9$, alors Δ_m est strictement négatif, donc l'équation $y^2-6y+m^2-10m+18 = 0$ n'a pas de solutions, donc il n'y a aucun points d'intersection entre la droite et le cercle ;
   - si $m = 1$ ou $m = 9$, alors Δ_m est égal à zéro, donc l'équation $y^2 - 6y + m^2 - 10m + 18 = 0$ a une unique solution, donc il y a un seul point d'intersection entre la droite et le cercle ;
   - si $m \in]1;9[$, alors Δ_m est strictement positif, donc l'équation $y^2 - 6y + m^2 - 10m + 18 = 0$ a deux solutions solutions, donc il y a deux points d'intersection entre la droite et le cercle.

   Ces différents cas sont illustrés ci-dessous :



$m < 1$ ou $m > 9$ | $m = 0$ ou $m = 9$ | $m \in \,]1;9[$

6. *Quelle est la position relative de la droite et du cercle dans le cas où $m = 1$ ou $m = 9$?*

   D'après la question précédente, si $m = 1$ ou $m = 9$, alors il y a un seul point d'intersection entre la droite et le cercle : la droite est tangente au cercle.