Exercice 24.

1. Mettons l'équation sous la forme $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

$$(x-4)^2+\left(y+\frac{3}{4}\right)^2=2$$
$$(x-4)^2+\left(y-\left(-\frac{3}{4}\right)\right)^2=\sqrt{2}^2$$

Donc le cercle a pour centre $A\left(4;-\frac{3}{4}\right)$ et pour rayon $\sqrt{2}$.

2. Même méthode, mais en commençant par factoriser. Dans l'expression x^2+2x, nous reconnaissons l'identité remarquable $(x+1)^2=x^2+2x+1$, à laquelle il manque le $+1$. Donc nous l'ajoutons (pour faire apparaître l'identité), et nous l'enlevons (pour ne pas modifier l'expression).

$$x^2+y^2+2x=0$$
$$x^2+2x+1-1+y^2=0$$
$$(x+1)^2+y^2=1$$
$$(x-(-1))^2+(y-0)^2=1^2$$

Donc le cercle a pour centre $A\,(-1;0)$ et pour rayon 1.

3. Même méthode.

$$\begin{aligned}
x^2+y^2+x-4y-\frac{3}{2}&=0\\
\left(x^2+x\right)+\left(y^2-4y\right)-\frac{3}{2}&=0\\
\left(x^2+2\times 0,5x+0,5^2-0,5^2\right)+\left(y^2-2\times 2y+2^2-2^2\right)-\frac{3}{2}&=0\\
(x+0,5)^2-0,5^2+(y-2)^2-2^2-\frac{3}{2}&=0\\
(x+0,5)^2+(y-2)^2-5,75&=0\\
(x+0,5)^2+(y-2)^2&=5,75\\
(x-(-0,5))^2+(y-2)^2&=\sqrt{5,75}^2
\end{aligned}$$

Donc le cercle a pour centre $A\,(-0,5;2)$ et pour rayon $\sqrt{5,75}$.

4. Cette fois, nous reconnaissons un produit scalaire : en prenant $M\,(x;y)$, $A\,(1;-2)$ et $B\,(-1;-1)$, on a :

$$\begin{aligned}
(x-1)\,(x+1)+(y+2)\,(y+1)&=0\\
(x-1)\,(x-(-1))+(y-(-2))\,(y-(-1))&=0\\
\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}&=0
\end{aligned}$$

Donc le cercle a pour diamètre $[AB]$. Son centre est donc le milieu de

$[AB]$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right) \\ =\left(\frac{1+(-1)}{2};\frac{-2+(-1)}{2}\right) \\ =(0;-1,5) \end{aligned}$$

Et son rayon est la moitié du diamètre. Puisque :

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} \\ &= \sqrt{(-1-1)^2+(-1-(-2))^2} \\ &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

Alors le rayon est $\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

5. Même méthode qu'à la question précédente : nous reconnaissons un produit scalaire. En prenant $M(x;y)$, $A\left(\frac{1}{2};-1\right)$ et $B\left(-1;-\frac{3}{2}\right)$, on a :

$$\begin{aligned} \left(x-\frac{1}{2}\right)(x+1)+(y+1)\left(y+\frac{3}{2}\right) &= 0 \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)(x-(-1))+(y-(-1))\left(y-\left(-\frac{3}{2}\right)\right) &= 0 \\ \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} &= 0 \end{aligned}$$

Donc le cercle a pour diamètre $[AB]$. Son centre est donc le milieu de

$[AB]$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right) \\ =\left(\frac{\frac{1}{2}+(-1)}{2};\frac{-1+\left(-\frac{3}{2}\right)}{2}\right) \\ =(-0,25;-1,25)\end{aligned}$$

Et son rayon est la moitié du diamètre. Puisque :

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} \\ &= \sqrt{\left(-1-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}-(-1)\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{10}}{2}\end{aligned}$$

Alors le rayon est $\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{10}}{4}$.

Exercice 34. 1. On reconnait dans x^2-6x une partie de l'identité remarquable $(x-3)^2=x^2-6x+9$. On ajoute donc $+9-9$ pour faire « apparaître » ce $+9$, et pouvoir factoriser.

$$\begin{aligned} x^2-6x &= x^2-6x+9-9 \\ &= x^2-2\times 3x+3^2-9 \\ &= (x-3)^2-9\end{aligned}$$

2. Même méthode.

$$\begin{aligned} y^2+2y &= y^2+2\times y+1-1 \\ &= y^2+2\times 1\times y+1^2-1 \\ &= (y+1)^2-1\end{aligned}$$

3. Donc :

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + y^2 - 2y + 5 &= 0 \\ (x-3)^2 - 9 + (y+1)^2 - 1 + 5 &= 0 \\ (x-3)^2 + (y+1)^2 - 5 &= 0 \end{aligned}$$

4. Reprenons la dernière équation de la question précédente, et mettons la sous la forme de l'équation d'un cercle.

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + y^2 - 2y + 5 &= 0 \\ (x-3)^2 + (y+1)^2 - 5 &= 0 \\ (x-3)^2 + (y-(-1))^2 &= 5 \\ (x-3)^2 + (y-(-1))^2 &= \sqrt{5}^2 \end{aligned}$$

   Donc (E) est un cercle de centre $A\,(3;-1)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

Exercice 35. *Corrigé dans le manuel...*

Exercice 36. C'est la même méthode que dans l'exercice précédent, donc je me permets d'aller un peu vite...

1.

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + y^2 - 4y &= -1 \\ (x+1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 &= -1 \\ (x+1)^2 + (y-2)^2 - 5 &= -1 \\ (x+1)^2 + (y-2)^2 &= 4 \\ (x-(-1))^2 + (y-2)^2 &= 2^2 \end{aligned}$$

C'est donc l'équation d'un cercle de centre $A\left(-1;2\right)$ et de rayon 2.

2.

$$\begin{aligned}
x^2+y^2-6y &= -10\\
x^2+\left(y-3\right)^2-9 &= -10\\
x^2+\left(y-3\right)^2 &= -1
\end{aligned}$$

Le membre de gauche est une somme de carrés, donc il est positive. Le membre de droite est strictement négatif. Un nombre positif ne peut pas être égal à un nombre strictement négatif, donc il n'y a pas de solution.

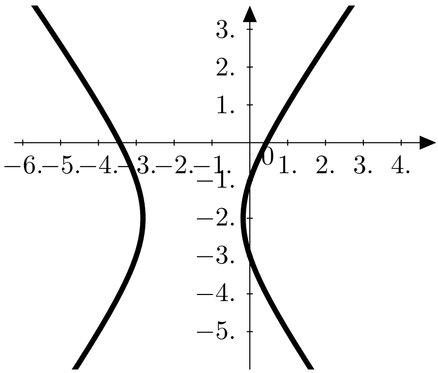
L'ensemble des points vérifiant cette équation est l'ensemble vide.

3.

$$\begin{aligned}
2x^2+6x-y^2-4y &= 3\\
2\left(x^2+3x\right)-\left(y^2+4y\right) &= 3\\
2\left(\left(x+1,5\right)^2-1,5^2\right)-\left(\left(y+2\right)^2-2^2\right) &= 3\\
2\left(x+1,5\right)^2-4,5-\left(y+2\right)^2+4 &= 3\\
2\left(x+1,5\right)^2-\left(y+2\right)^2 &= 3,5
\end{aligned}$$

Ce n'est pas l'équation d'un cercle (à cause du coefficient 2 devant le $\left(x+1,5\right)^2$, et du signe $-$ entre $\left(x+1,5\right)^2$ et $\left(y+2\right)^2$.

Pour information, il s'agit de l'équation de l'hyperbole suivante (mais ce n'est pas au programme du lycée).



4.

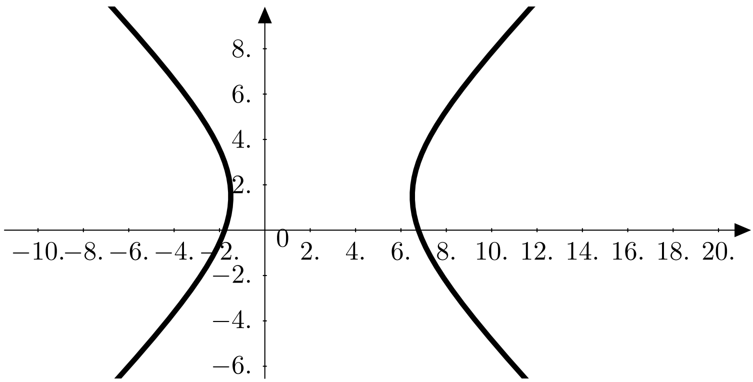
$$
\begin{aligned}
x^2+y^2+x-y&=0\\
(x+0,5)^2-0,5^2+\left(y-0,5^2\right)-0,5^2&=0\\
(x+0,5)^2+\left(y-0,5^2\right)-0,5&=0\\
(x+0,5)^2+\left(y-0,5^2\right)&=0,5\\
(x-(-0,5))^2+\left(y-0,5^2\right)&=\sqrt{0,5}^2
\end{aligned}
$$

Donc l'équation est celle d'un cercle de centre $A\,(-0,5;0,5)$ et de rayon $\sqrt{0,5}$.

5.

$$
\begin{aligned}
x^2 - 5x - y^2 + 3y - 12 &= 0\\
(x-2,5)^2 - 2,5^2 - \left(y^2 - 3y\right) - 12 &= 0\\
(x-2,5)^2 - \left((y-1,5)^2 - 1,5^2\right) - 18,25 &= 0\\
(x-2,5)^2 - (y-1,5)^2 + 1,5^2 - 18,25 &= 0\\
(x-2,5)^2 - (y-1,5)^2 - 16 &= 0\\
(x-2,5)^2 - (y-1,5)^2 &= 16
\end{aligned}
$$

À cause du signe $-$ entre $(x-2,5)^2$ et $(y-1,5)^2$, ce n'est pas l'équation d'un cercle. Pour information, il s'agit de l'équation de l'hyperbole suivante.



Exercice 37. *Corrigé dans le manuel...*

Exercice 41. 1. Les coordonnées du milieu d'un segment sont les moyennes des coordonnées des deux extrémités. Donc :

$$K'\begin{pmatrix}\frac{x_L+x_M}{2}\\\frac{y_L+y_M}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1+5}{2}\\\frac{4+4}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$
$$L'\begin{pmatrix}\frac{x_K+x_M}{2}\\\frac{y_K+y_M}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2+5}{2}\\\frac{1+4}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3,5\\2,5\end{pmatrix}$$
$$M'\begin{pmatrix}\frac{x_L+x_K}{2}\\\frac{y_L+y_K}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2+1}{2}\\\frac{1+4}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1,5\\2,5\end{pmatrix}$$

2. La droite $\mathcal{D}$ est la médiatrice de $[KL]$ si : (a) elle est perpendiculaire à $[KL]$; (b) elle coupe $[KL]$ en son milieu.

   — Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $\overrightarrow{u}\binom{3}{1}$ (c'est-à-dire $\overrightarrow{u}\binom{-b}{a}$, avec $a=1$ et $b=-3$ car l'équation de la droite est $x-3y+6=0$).

   — Un vecteur directeur de (KL) est $\overrightarrow{KL}\binom{x_L-x_K}{y_L-y_K}=\binom{1-2}{4-1}=\binom{-1}{3}$.

   Vérifions si les deux vecteurs sont orthogonaux, avec le produit scalaire : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{KL}=3\times(-1)+1\times 3=0$. Donc leur produit scalaire est nul, et les deux vecteurs sont orthogonaux, et les deux droites sont perpendiculaires.

   De plus, nous avons montré à la question précédente que le milieu de $[KL]$ est $M'(1,5;2,5)$. Vérifions que ces coordonnées vérifient l'équation de $\mathcal{D}$: $x_{M'}-3y_{M'}+6=1,5-3\times 2,5+6=0$. Donc le point M', milieu de $[KL]$, est sur la droite $\mathcal{D}$.

   La droite $\mathcal{D}$ est donc bien la médiatrice de $[KL]$.

3. La médiatrice $\mathcal{D}'$ de $[KM]$ est la droite passant par le milieu $L'\,(3,5;2,5)$ de $[KM]$, et perpendiculaire à $[KM]$ (c'est-à-dire ayant $\overrightarrow{KM}\binom{x_M-x_K}{y_M-y_K} = \binom{5-2}{4-1} = \binom{3}{3}$ comme vecteur normal).
Soit $N\,(x;y)$ un point du plan. Alors $\overrightarrow{L'N}\binom{x-3{,}5}{y-2{,}5}$. Le point N est un point de la médiatrice $\mathcal{D}'$ si et seulement si le produit scalaire $\overrightarrow{L'N}.\overrightarrow{KM}$ est nul, c'est-à-dire :
$$\begin{aligned}(x-3,5)\times 3+(y-2,5)\times 3&=0\\ 3x-10,5+3y-7,5&=0\\ 3x+3y-18&=0\end{aligned}$$

4. Appelons $I\,(x;y)$ le point d'intersection des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Puisque I est sur les deux droites, alors ses coordonnées vérifient les deux équations.
$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array} \quad \begin{cases} x-3y+6=0 \\ 3x+3y-18=0 \end{cases}$$
$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_1+L_2 \end{array} \quad \begin{cases} x-3y+6=0 \\ 4x-12=0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x-3y+6=0 \\ 4x=12 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x-3y+6=0 \\ x=3 \end{cases}$$
Nous pouvons maintenant remplacer x par 3 dans la première équation.
$$\begin{cases} 3-3y+6=0 \\ x=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3y = -9 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 \\ x = 3 \end{cases}$$

Les coordonnées du point d'intersection des deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont donc $(3;3)$.

5. Le centre du cercle circonscrit au triangle KLM est à la même distance des trois sommets K, L, M du triangle.

   Puisqu'il est à la même distance de K et L, il est sur la médiatrice $\mathcal{D}$ de $[KL]$. Puisqu'il est à la même distance de K et M, il est sur la médiatrice $\mathcal{D}'$ de $[KM]$. Le centre du cercle est donc sur les deux médiatrices : c'est donc le point $I\,(3;3)$ donc nous avons calculé les coordonnées à la question précédente.

   Le cercle circonscrit passe par les trois sommets du triangle, donc le segment $[IL]$ est un rayon du cercle. Donc le rayon est :

$$\begin{aligned} IL &= \sqrt{(x_L - x_I)^2 + (y_L - y_I)^2} \\ &= \sqrt{(1-3)^2 + (4-3)^2} \\ &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

   Le cercle circonscrit au triangle est donc le cercle de centre $I\,(3;3)$ et de rayon $\sqrt{5}$. Son équation est donc :

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 5$$

Exercice 45. *Corrigé dans le manuel...*