Exemple 1

Déterminer les variations de la fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par l'expression : $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x + 5$.

Étape 1 : Dériver la fonction La fonction f est un polynôme, donc sa dérivée est :

$$f'(x) = 3 \times x^2 + 4 \times 2x - 3$$
$$f'(x) = 3x^2 + 8x - 3$$

Étape 2 : Déterminer le signe de la dérivée La dérivée f' est un trinôme du second degré, avec $a = 3$, $b = 8$ et $c = -3$. Son discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \times 3 \times (-3) = 100$.

Le discriminant est strictement positif, donc le trinôme a deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 - \sqrt{100}}{2 \times 3} = -3$$
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 + \sqrt{100}}{2 \times 3} = \frac{1}{3}$$

Son tableau de signes est donc :

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	23	$\searrow$	$\frac{121}{27}$	$\nearrow$	

Étape 3 : Déduire les variation de la fonction du signe de sa dérivée. Fait à la fin du tableau précédent.