Exercice 1 (Inspiré du sujet d'EC n° 21). *Dans le plan muni d'un repère orthonormé* $(O; I; J)$ *, on considère les points* $A(-1; 2)$*,* $B(5; 10)$ *et* $C(3; 5)$*. Le but de l'exercice est de calculer l'aire du triangle* ABC*.*

1. *Calculer le produit scalaire* $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$*.*

   Utilisons l'expression avec les coordonnées, dans un repère orthonormé. On a :

   $$\overrightarrow{AB}\binom{x_B - x_A}{y_B - y_A} = \binom{5-(-1)}{10-2} = \binom{6}{8}$$
   $$\overrightarrow{AC}\binom{x_C - x_A}{y_C - y_A} = \binom{3-(-1)}{5-2} = \binom{4}{3}$$

   Donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 6 \times 4 + 8 \times 3 = 24 + 24 = 48$.

2. (a) *Soit* D *le pied de la hauteur du triangle* ABC *issue de* C*. Justifier que* $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$*.*

   Puisque D est le pied de la hauteur issue de C, alors D est le projeté orthogonal de C sur (AB), donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.

   (b) *En déduire que* $AD = 4,8$*.*

   Puisque D est le pied de la hauteur issue de C, alors D est sur $[AB]$, et les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires, donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = AB \times AD$.

   De plus, $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(5 - (-1))^2 + (10 -$ 10, donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 10AD$.

   D'autre part, nous avons montré à la question précédente que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 48$, donc $10AD = 48$ et $AD = 4,8$.

3. *Montrer que* $CD = 1,4$*.*

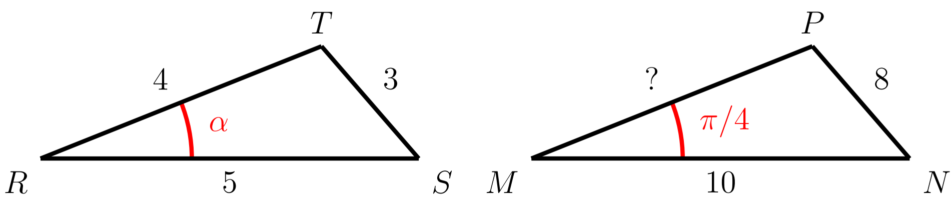
   Remarquons d'abord que $AC = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{x^2_{\overrightarrow{AC}} + y^2_{\overrightarrow{AC}}} = \sqrt{4^2 + 3^2} =$ 5. Puisque $[CD]$ est une hauteur du triangle, alors les droites (CD) et (AB) sont perpendiculaires, et le triangle ACD est rectangle en D, donc nous pouvons appliquer le théorème de Pythagore.

$$\begin{aligned} AC^2 &= AD^2 + CD^2 \\ 5^2 &= 4,8^2 + CD^2 \\ 25 - 23,04 &= CD^2 \\ 1,96 &= CD^2 \\ CD &= 1,4 \end{aligned}$$

4. *En déduire l'aire du triangle ABC.*
   Puisque $[CD]$ est une hauteur du triangle, alors l'aire est $\frac{AB\times CD}{2} = \frac{10\times 1,4}{2} = 7$.

Exercice 2 (Théorème d'Al Kashi)**.** *Les figures ne sont pas à l'échelle. Les deux questions sont indépendantes.*

1. *Déterminer une mesure de l'angle α.*
2. *Déterminer la longueur MP.*



1. Appliquons le théorème d'Al Kashi.

$$\begin{aligned} TS^2 &= TR^2 + SR^2 - 2\times TR \times SR \times \cos\widehat{TRS} \\ 3^2 &= 4^2 + 5^2 - 2\times 4\times 5\times \cos\alpha \\ 9 &= 41 - 40\cos\alpha \\ -32 &= -40\cos\alpha \\ \frac{4}{5} &= \cos\alpha \\ \alpha &= \arccos\frac{4}{5} \end{aligned}$$

Donc l'angle α mesure $\arccos \frac{4}{5}$ (soit environ 37° si vous voulez une valeur approchée).

Remarquons que dans ce cas là, le triangle TSR est rectangle en T. Donc après avoir utilisé le théorème de Pythagore pour prouver cela, nous aurions pu trouver la mesure de α en utilisant la trigonométrie de collège.

2. Appliquons le théorème d'Al Kashi dans le triangle PNM.

$$\begin{aligned} PN^2 &= PM^2 + NM^2 - 2 \times PM \times NM \times \cos \widehat{PMN} \\ 8^2 &= PM^2 + 10^2 - 2 \times PM \times 10 \times \cos \frac{\pi}{4} \\ 64 &= PM^2 + 100 - 10\sqrt{2}PM \\ 0 &= PM^2 - 10\sqrt{2}PM + 36 \end{aligned}$$

Nous avons donc un polynôme du second degré de paramètres $a = 1$, $b = -10\sqrt{2}$, et $c = 36$, et de discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(-10\sqrt{2}\right)^2 - 4 \times 1 \times 36 = 200 - 144 = 56$$

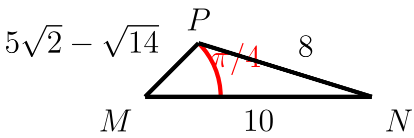
Puisque $\Delta > 0$, il y a donc deux racines :

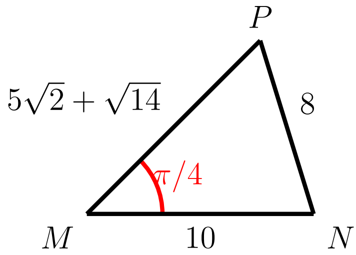
$$PM_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\left(-10\sqrt{2}\right) - \sqrt{56}}{2 \times 1} = \frac{10\sqrt{2} - 2\sqrt{14}}{2} = 5\sqrt{2} - \sqrt{1}$$

$$PM_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\left(-10\sqrt{2}\right) + \sqrt{56}}{2 \times 1} = \frac{10\sqrt{2} + 2\sqrt{14}}{2} = 5\sqrt{2} + \sqrt{1}$$

Il y a donc deux valeurs possibles pour PM : $5\sqrt{2} - \sqrt{14}$ ou $5\sqrt{2} + \sqrt{14}$.

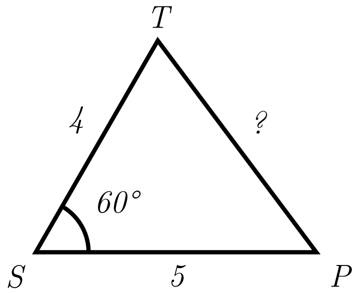
C'est surprenant à première vue, mais en fait, il y a deux constructions possibles qui vérifient les conditions de l'énoncé, qui sont montrée ici.





Exercice 3 (Théorème d'Al Kashi)**.** *Pour installer un câble entre une tour T et un pylône P, on aimerait connaitre la distance qui les sépare. Malheureusement, le terrain accidenté entre eux rend une mesure directe difficile.*

En revanche, on a pu mesurer la distance de ces deux objets par rapport à un sapin S situé un peu plus loin, ainsi que l'angle formé par ces trois objets. Ces mesures sont schématisées dans le graphique suivant (qui n'est pas à l'échelle). Toutes les longueurs sont données en hectomètres.



Calculer une approximation de la longueur TP au mètre près.
C'est une application directe du théorème d'Al Kashi.

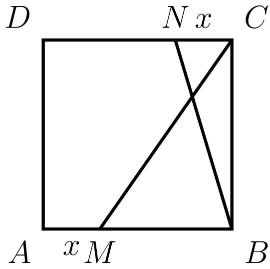
$$TP^2 = ST^2 + SP^2 - 2 \times TS \times SP \times \cos \widehat{TSP}$$
$$TP^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \times 4 \times 5 \times \cos 60$$
$$TP^2 = 16 + 25 - 20$$
$$TP^2 = 21$$
$$TP = \sqrt{21}$$
$$TP \approx 4,58$$

Le segment TP mesure environ 4,58 hectomètres, soit 458 mètres.

Exercice 4 (Problème : Lieu géométrique)**.** Corrigé en classe.

Exercice 5 (Perpendicularité)**.**

On considère le carré $ABCD$ de côté 1, et x un nombre compris entre 0 et 1. On place le point M sur le segment $[AB]$,tel que $AM = x$, et N sur le segment $[CD]$, tel que $CN = x$. La situation est illustrée sur la figure suivante.



On se pose la question : Pour quelles valeurs de x les droites (BN) et (CM) sont-elles perpendiculaires ?
On se place dans le repère $(A; B; D)$.

1. *Sans justifier, donner les coordonnées de B, C, N, M.*
   Dans le repère (A, B, D), les coordonnées sont : $B(1; 0)$, $D(0; 1)$, $M(x; 0)$, $N(1 - x; 1)$.
2. *En déduire que $\overrightarrow{BN}\binom{-x}{1}$ et $\overrightarrow{CM}\binom{x-1}{-1}$.*
   $\overrightarrow{BN}\binom{x_N - x_B}{y_N - y_B} = \binom{1-x-1}{1-0} = \binom{-x}{1}$
   $\overrightarrow{CM}\binom{x_M - x_C}{y_M - y_C} = \binom{x-1}{0-1} = \binom{x-1}{-1}$
3. *Montrer que les droites (BN) et (CM) sont perpendiculaires si et seulement si $-x^2 + x - 1 = 0$.*
   Les droites (BN) et (CM) perpendiculaires si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{CM}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire si leur produit scalaire $\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{CM} = 0$:
   $$\begin{aligned} \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{CN} &= 0 \\ -x \times (x-1) + 1 \times (-1) &= 0 \\ -x^2 + x - 1 &= 0 \end{aligned}$$
4. *En déduire les solutions au problème posé.*
   D'après la question précédente, les deux droites sont perpendiculaires si et seulement si $-x^2 + x + 1 = 0$. C'est un polynôme du

second degré, de discriminant $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times (-1) = -3$. Donc $\Delta < 0$, et l'équation n'a pas de solutions, et le problème n'a pas non plus de solutions : quelle que soit la position du point M sur le segment $[AB]$ (et même sur la droite (AB)), les droites (BN) et (CM) ne sont jamais perpendiculaires.