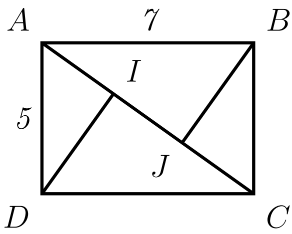
Exercice 1 (Calcul de longueur)**.**

On considère le rectangle $ABCD$ suivant. Les points I et J sont respectivement les projetés orthogonaux des points B et D sur la diagonale $[AC]$.
L'objet de l'exercice est de déterminer la longueur IJ.



0. *Il est possible de résoudre ce problème* sans *produit scalaire, uniquement avec les connaissances de seconde (voire de collège). Comment faire ?*

   On pourrait calculer la longueur AC avec le théorème de Pythagore.

   Puis on calcule l'angle $\widehat{ACD}$ avec la trigonométrie dans le triangle rectangle ACD. On en déduit l'angle $\widehat{ACB}$ puis, puisque le triangle BJC est rectangle en J et que $\widehat{BJC} = 90°$, on en déduit l'angle $\widehat{JBC}$. Connaissant ce dernier angle, avec de la trigonométrie dans ce triangle BCJ rectangle, on en déduit la longueur JC.

   On peut facilement prouver que les longueurs JC et AI sont égales.

   Enfin, puisque l'on a pu calculer AC, JC, AI, par soustraction, on peut calculer IJ.

1. *Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$.*

   On se place dans le repère d'origine D, d'axes (DC) et (DA), et d'unité 1. Dans ce repère, on a : $A\binom{0}{5}$, $B\binom{7}{5}$, $C\binom{7}{0}$, $D\binom{0}{0}$, et donc $\overrightarrow{AC}\binom{7}{-5}$ et $\overrightarrow{DB}75$.

   Donc $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = 7 \times 7 + (-5) \times 5 = 49 - 25 = 24$.

2. (a) *Décomposer le vecteur $\overrightarrow{DB}$ avec la relation de Chasles :*

$$\overrightarrow{DB} = \color{red}{\overrightarrow{DI}} + \overrightarrow{IJ} + \color{red}{\overrightarrow{JB}}$$

(b) *En utilisant cette décomposition, exprimer le produit scalaire* $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$ *en fonction des longueurs* IJ *et* AC.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} &= \overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JB}\right)\\ &= \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{JB}\end{aligned}$$

Or, puisque I est le projeté orthogonal de D sur (AC), alors les droites (DI) et (AC) sont perpendiculaires, et les vecteurs $\overrightarrow{DI}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux, et le produit scalaire $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DI}$ est nul. De même, $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{JB} = 0$.

D'autre part, pusique les points A, I, J, C sont alignés dans cet ordre, alors les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires dans le même sens, donc $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{IJ} = AC \times IJ$. Donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} &= \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{JB}\\ &= 0 + AC \times IJ + 0\\ &= AC \times IJ\end{aligned}$$

3. *En déduire la longueur* IJ.

En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle ADC rectangle en D, on obtient $AC = \sqrt{74}$.

Donc, puisque nous avions montré à la question précédente que $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = 24$, alors :

$$\begin{aligned}AC \times IJ &= 24\\ \sqrt{74} \times IJ &= 24\\ IJ &= \frac{24}{\sqrt{74}}\\ IJ &= \frac{24 \times \sqrt{74}}{74}\\ IJ &= \frac{12\sqrt{74}}{37}\end{aligned}$$