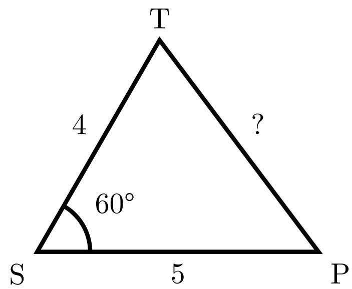
Exercice 1 (Inspiré du sujet d'EC n^{o} 21)**.** Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$, on considère les points $A(-1; 2)$, $B(5; 10)$ et $C(3; 5)$. Le but de l'exercice est de calculer l'aire du triangle ABC.

1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.
2. (a) Soit D le pied de la hauteur du triangle ABC issue de C. Justifier que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.
   (b) En déduire que $AD = 4,8$.
3. Montrer que $CD = 1,4$.
4. En déduire l'aire du triangle ABC.

Exercice 2 (Théorème d'Al Kashi)**.** Pour installer un câble entre une tour T et un pylône P, on aimerait connaitre la distance qui les sépare. Malheureusement, le terrain accidenté entre eux rend une mesure directe difficile.

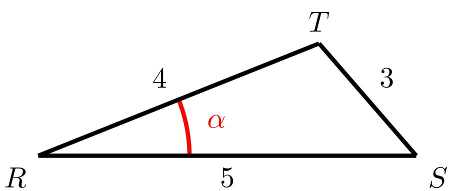
En revanche, on a pu mesurer la distance de ces deux objets par rapport à un sapin S situé un peu plus loin, ainsi que l'angle formé par ces trois objets. Ces mesures sont schématisées dans le graphique suivant (qui n'est pas à l'échelle). Toutes les longueurs sont données en hectomètres.

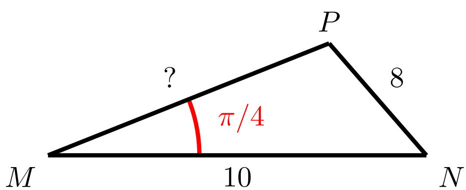


Calculer une approximation de la longueur TP au mètre près.

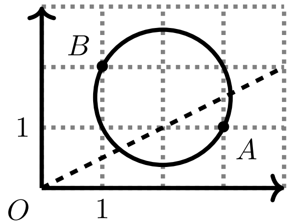
Exercice 3 (Théorème d'Al Kashi)**.** *Les figures ne sont pas à l'échelle. Les deux questions sont indépendantes.*

1. Déterminer une mesure de l'angle α.
2. Déterminer la longueur MP.





Exercice 4 (Problème : Lieu géométrique)**.** Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(3;1)$ et $B(1;2)$, le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$, et la droite $\mathcal{D}$, d'équation $y = x/2$.



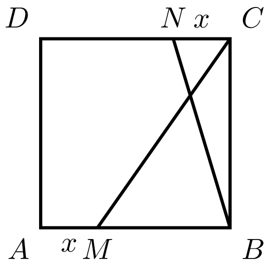
L'objet de l'exercice est de déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$. Soit $M\,(x;y)$ un de ces points d'intersection.

1. Montrer que ni A, ni B n'est sur la droite $\mathcal{D}$.

Ainsi, A, B et M sont trois points distincts : l'angle $\widehat{AMB}$ est bien défini, et les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont non nuls.

2. *Étude du cercle $\mathcal{C}$.*
   (a) *Hors programme* Justifier que l'angle $\widehat{AMB}$ est droit.
   (b) En utilisant le produit scalaire $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}$, montrer que :
   $$(x-3)\,(x-1)+(y-1)\,(y-2)=0$$
3. En utilisant cette équation et celle de la droite $\mathcal{D}$, déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{D}$.

Exercice 5 (Perpendicularité)**.** On considère le carré $ABCD$ de côté 1, et x un nombre compris entre 0 et 1. On place le point M sur le segment $[AB]$,tel que $AM = x$, et N sur le segment $[CD]$, tel que $CN = x$. La situation est illustrée sur la figure suivante.



On se pose la question : Pour quelles valeurs de x les droites (BN) et (CM) sont-elles perpendiculaires ?
On se place dans le repère $(A;B;D)$.

1. Sans justifier, donner les coordonnées de B, C, N, M.
2. En déduire que $\overrightarrow{BN}\begin{pmatrix}-x\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-1\\-1\end{pmatrix}$.
3. Montrer que les droites (BN) et (CM) sont perpendiculaires si et seulement si $-x^2+x-1=0$.
4. En déduire les solutions au problème posé.