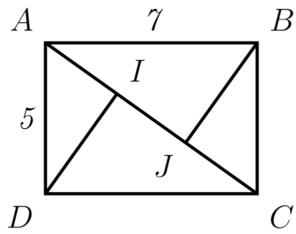
Exercice 1 (Calcul de longueur)**.**

On considère le rectangle $ABCD$ suivant. Les points I et J sont respectivement les projetés orthogonaux des points B et D sur la diagonale $[AC]$.
L'objet de l'exercice est de déterminer la longueur IJ.



0. *Il est possible de résoudre ce problème* sans *produit scalaire, uniquement avec les connaissances de seconde (voire de collège). Comment faire ?*

   On pourrait calculer la longueur AC avec le théorème de Pythagore.

   Puis on calcule l'angle $\widehat{ACD}$ avec la trigonométrie dans le triangle rectangle ACD. On en déduit l'angle $\widehat{ACB}$ puis, puisque le triangle BJC est rectangle en J et que $\widehat{BJC} = 90°$, on en déduit l'angle $\widehat{JBC}$. Connaissant ce dernier angle, avec de la trigonométrie dans ce triangle BCJ rectangle, on en déduit la longueur JC.

   On peut facilement prouver que les longueurs JC et AI sont égales.

   Enfin, puisque l'on a pu calculer AC, JC, AI, par soustraction, on peut calculer IJ.

1. *Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$.*

   On se place dans le repère d'origine D, d'axes (DC) et (DA), et d'unité 1. Dans ce repère, on a : $A\binom{0}{5}$, $B\binom{7}{5}$, $C\binom{7}{0}$, $D\binom{0}{0}$, et donc $\overrightarrow{AC}\binom{7}{-5}$ et $\overrightarrow{DB}75$.

   Donc $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = 7 \times 7 + (-5) \times 5 = 49 - 25 = 24$.

2. (a) *Décomposer le vecteur $\overrightarrow{DB}$ avec la relation de Chasles :*

$$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JB}$$

(b) *En utilisant cette décomposition, exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$ en fonction des longueurs IJ et AC.*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} &= \overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JB}\right)\\ &= \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{JB}\end{aligned}$$

Or, puisque I est le projeté orthogonal de D sur (AC), alors les droites (DI) et (AC) sont perpendiculaires, et les vecteurs $\overrightarrow{DI}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux, et le produit scalaire $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DI}$ est nul. De même, $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{JB}=0$.
D'autre part, pusique les points A, I, J, C sont alignés dans cet ordre, alors les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires dans le même sens, donc $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{IJ}=AC\times IJ$. Donc :

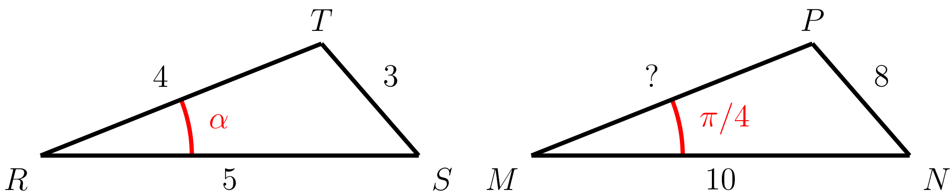
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} &= \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{JB}\\ &= 0+AC\times IJ+0\\ &= AC\times IJ\end{aligned}$$

3. *En déduire la longueur IJ.*
En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle ADC rectangle en D, on obtient $AC=\sqrt{74}$.
Donc, puisque nous avions montré à la question précédente que $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}=24$, alors :

$$\begin{aligned}AC\times IJ &= 24\\ \sqrt{74}\times IJ &= 24\\ IJ &= \frac{24}{\sqrt{74}}\\ IJ &= \frac{24\times\sqrt{74}}{74}\\ IJ &= \frac{12\sqrt{74}}{37}\end{aligned}$$

Exercice 2 (Théorème d'Al Kashi)**.** *Les figures ne sont pas à l'échelle. Les deux questions sont indépendantes.*

1. *Déterminer une mesure de l'angle α.*
2. *Déterminer la longueur MP.*



1. Appliquons le théorème d'Al Kashi.

$$\begin{aligned}
TS^2 &= TR^2 + SR^2 - 2 \times TR \times SR \times \cos \widehat{TRS} \\
3^2 &= 4^2 + 5^2 - 2 \times 4 \times 5 \times \cos \alpha \\
9 &= 41 - 40 \cos \alpha \\
-32 &= -40 \cos \alpha \\
\frac{4}{5} &= \cos \alpha \\
\alpha &= \arccos \frac{4}{5}
\end{aligned}$$

Donc l'angle α mesure $\arccos \frac{4}{5}$ (soit environ 37° si vous voulez une valeur approchée).

Remarquons que dans ce cas là, le triangle TSR est rectangle en T. Donc après avoir utilisé le théorème de Pythagore pour prouver cela, nous aurions pu trouver la mesure de α en utilisant la trigonométrie de collège.

2. Appliquons le théorème d'Al Kashi dans le triangle PNM.

$$\begin{aligned}
PN^2 &= PM^2 + NM^2 - 2 \times PM \times NM \times \cos \widehat{PMN} \\
8^2 &= PM^2 + 10^2 - 2 \times PM \times 10 \times \cos \frac{\pi}{4} \\
64 &= PM^2 + 100 - 10\sqrt{2}PM \\
0 &= PM^2 - 10\sqrt{2}PM + 36
\end{aligned}$$

Nous avons donc un polynôme du second degré de paramètres $a = 1$, $b = -10\sqrt{2}$, et $c = 36$, et de discriminant :

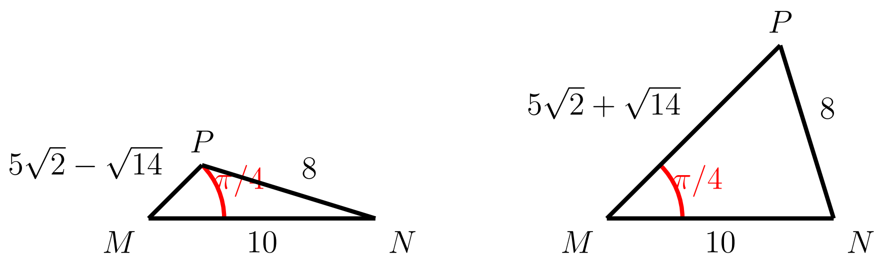
$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(-10\sqrt{2}\right)^2 - 4 \times 1 \times 36 = 200 - 144 = 56$$

Puisque $\Delta > 0$, il y a donc deux racines :

$$PM_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\left(-10\sqrt{2}\right)-\sqrt{56}}{2 \times 1} = \frac{10\sqrt{2}-2\sqrt{14}}{2} = 5\sqrt{2} - \sqrt{1}$$
$$PM_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\left(-10\sqrt{2}\right)+\sqrt{56}}{2 \times 1} = \frac{10\sqrt{2}+2\sqrt{14}}{2} = 5\sqrt{2} + \sqrt{1}$$

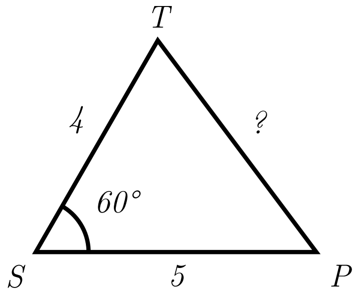
Il y a donc deux valeurs possibles pour PM : $5\sqrt{2} - \sqrt{14}$ ou $5\sqrt{2} + \sqrt{14}$.

C'est surprenant à première vue, mais en fait, il y a deux constructions possibles qui vérifient les conditions de l'énoncé, qui sont montrée ici.



Exercice 3 (Théorème d'Al Kashi)**.** *Pour installer un câble entre une tour T et un pylône P, on aimerait connaitre la distance qui les sépare. Malheureusement, le terrain accidenté entre eux rend une mesure directe difficile.*

En revanche, on a pu mesurer la distance de ces deux objets par rapport à un sapin S situé un peu plus loin, ainsi que l'angle formé par ces trois objets. Ces mesures sont schématisées dans le graphique suivant (qui n'est pas à l'échelle). Toutes les longueurs sont données en hectomètres.



Calculer une approximation de la longueur TP au mètre près.
C'est une application directe du théorème d'Al Kashi.

$$\begin{aligned} TP^2 &= ST^2 + SP^2 - 2 \times TS \times SP \times \cos \widehat{TSP} \\ TP^2 &= 4^2 + 5^2 - 2 \times 4 \times 5 \times \cos 60 \\ TP^2 &= 16 + 25 - 20 \\ TP^2 &= 21 \\ TP &= \sqrt{21} \\ TP &\approx 4,58 \end{aligned}$$

Le segment TP mesure environ 4,58 hectomètres, soit 458 mètres.

Exercice 4 (Problème : Lieu géométrique)**.** *Corrigé en classe…*