Chapitre 9

Produit scalaire

1 Expressions et Orthogonalité

Définition 1. Étant donnés deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on appelle *produit scalaire* de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le nombre réel :

- 0 si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$;
- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|.\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ sinon.

Propriété 2. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs.

— Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$.

— Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$ si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.

Propriété 3 (Autres expressions)**.** Étant donnés deux vecteurs $\overrightarrow{u}\binom{x}{y}$ et $\overrightarrow{v}\binom{x'}{y'}$, on a :

— $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy'$

— Si $\overrightarrow{u} \neq 0$, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v_1}$, où $\overrightarrow{v_1}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{v}$ sur la droite de direction $\overrightarrow{u}$.

Démonstration. Démonstration □

Propriété 4. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs colinéaires. Alors :

- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$ si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont le même sens ;
- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = -\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$ si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont de sens opposé.

Avec des points

Propriété 5 (Avec des points)**.** Soient trois points A, B, C, distincts deux à deux. Alors :
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos\widehat{BAC}$
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$, où H est le projeté orthogonal de C sur (AB).

Corollaire 6. Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs colinéaires. Alors :
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = AB \times CD$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont le même sens ;
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = -AB \times CD$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont de sens opposé.

Corollaire 7. Soient A, B, C, D quatre points, tels que $A \neq B$ et $C \neq D$. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$ si et seulement si (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

2 Règles de calcul

Propriété 8. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur. On note $\overrightarrow{u}^2 = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2$.

Propriété 9 (Règles de calcul)**.** Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs, et k un réel. Alors :

(i) Le produit scalaire est commutatif : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$

(ii) Le produit scalaire est distributif sur l'addition : $\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} = (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}).\overrightarrow{u}$.

(iii) $(k\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = k(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}.(k\overrightarrow{v})$.

(iv) $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2$

(v) $(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 - 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2$

(vi) $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}^2 - \overrightarrow{v}^2$

Exemple 10. Preuve du théorème de Pythagore

3 Application dans un triangle

Théorème 11 (Théorème d'Al Kashi)**.** Soit un triangle ABC. Alors

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC.\cos\widehat{BAC}$$

Démonstration. TODO □