Exemple 1

On prend une personne dans la population française ayant fait un autotest du VIH au hasard, et on note les évènements :

— S : la personne est saine (elle n'a pas le VIH) ;

— N : le test est négatif (il indique qu'elle n'a pas le VIH).

1. *Recopier le tableau des probabilités de l'exemple d'introduction.* Voir le cours d'hier.
2. *Décrire par une phrase les probabilités suivantes, et donner leur valeur.*

   (a) $P(S)$: Probabilité que la personne soit saine (lue dans le tableau) : $P(S) = 0,9977$.

   (b) $P(N)$: Probabilité que le diagnostic soit négatif (lue dans le tableau) : $P(N) = 0,9957$.

   (c) $P_N(S)$: Probabilité que le diagnostic soit négatif sachant que la personne est saine :

$$P_N(S) = \frac{P(N \cap S)}{P(N)} = \frac{0,9957}{0,9957} = 1$$

   (d) $P_{\overline{S}}(N)$: Probabilité que la personne soit malade ($\overline{S}$: ne soit pas saine) sachant que le diagnostic est négatif :

$$P_{\overline{S}}(N) = \frac{P(\overline{S} \cap N)}{P(\overline{S})} = \frac{0}{0,0023} = 0$$

Exemple 2

Les évènements N et S de l'exemple précédent sont-ils indépendants ?

D'après la définition, ils sont indépendants si $P_N(S) = P(S)$

(nous aurions tout aussi bien pu vérifier si $P_S(N) = P(N)$, mais puisque nous avons déjà calculé $P_N(S)$ à la question précédente, cela simplifie les calculs) :

$P_N(S) = 1$ (calculé à la question précédente)
$P(S) = 0,9977$

Donc $P_N(S) \neq P(S)$, et les évènements N et S ne sont pas indépendants.
Remarquons que la conclusion est conforme à nos attentes : si le test fonctionne, il doit être plus souvent positif si la personne est vraiment malades. Si les évènements étaient indépendants, le résultat du test ne dépendrait pas de l'état (malade ou sain) du patient : ce serait un très mauvais test.