Exercice 1. *Tous les angles sont mesurés en radians.*
On définit sur un certain ensemble de définition (qui sera déterminé à la question 4) la fonction tangente *(notée simplement :* tan*) par :*

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Par exemple, puisque $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ *et* $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$*, alors :*

$$\tan\frac{\pi}{3} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

L'objet de cet exercice est d'étudier cette nouvelle fonction.

1. Échauffement. *En utilisant la définition, montrez que :*
   (a) $\tan 0 = 0$:
   $$\tan 0 = \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$$
   (b) $\tan\pi = 0$:
   $$\tan\pi = \frac{\sin\pi}{\cos\pi} = \frac{0}{-1} = 0$$
   (c) $\tan\frac{\pi}{4} = 1$:
   $$\tan\frac{\pi}{4} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$
   (d) $\tan -\frac{\pi}{2}$:
   $$\tan -\frac{\pi}{2} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}}$$
   Mais $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, donc dans le calcul précédent, on fait une division par zéro, ce qui est impossible. Donc $\tan -\frac{\pi}{2}$ n'existe pas.
2. Vocabulaire. *Dans le plan muni d'un repère orthonormé* (O, I, J)*, on considère le cercle trigonométrique, la droite* d*, tangente au cercle passant par* I*, et un point* M *sur le cercle, image d'un réel* x *compris dans l'intervalle* $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

Le point H est le projeté orthogonal du point M sur la droite (OI), et le point T est l'intersection des droites (OM) et d.

L'ensemble est représenté sur la figure 1 (à la fin du devoir).

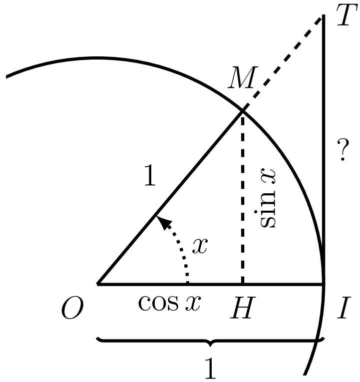
En utilisant le théorème de Thalès dans les triangles OMH et OTI, montrez que la distance IT est égale à $\frac{\sin x}{\cos x}$.

Voici les deux triangles de la figure, sur lesquels on a reporté toutes les longueurs connues.

— OM et OI sont égaux à 1 car ce sont des rayons du cercle trigonométrique.

— OH et MH sont égaux à $\cos x$ et $\sin x$ car ce sont les coordonnées du point M, correspondant à un angle x sur le cercle trigonométrique.

— TI est la longueur que nous cherchons.



Les hypothèses du théorède de Thalès sont réunies (OMH et OTI sont des triangles, O, M, T et O, H, I sont alignés, $[MH]$ et $[TI]$ sont parallèles (car toutes les deux perpendiculaires à (OI))), donc :

$$\frac{TI}{MH} = \frac{OI}{OH} = \frac{OT}{OM}$$

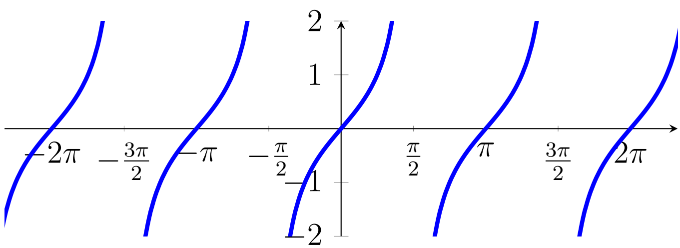
Seules les deux premières fractions nous intéressent :

$$\begin{aligned} & \frac{TI}{MH} = \frac{OI}{OH} \\ \iff & \frac{TI}{\sin x} = \frac{1}{\cos x} \\ \iff & TI = \frac{\sin x}{\cos x} \\ \iff & TI = \tan x \end{aligned}$$

Donc la longueur TI (que nous lisons sur la *tangente* au cercle trigonométrique), est bien égale à l'image de x par la fonction tangente.

3. Représentation graphique. *Avec votre calculatrice, le logiciel Geogebra*[1]*, ou tout autre outil de votre choix, tracez la courbe de la fonction tangente. Recopiez l'allure de la courbe (sa forme, sans être très précis) sur votre copie.*

   Cette courbe pourra vous être utile pour vérifier graphiquement vos réponses aux questions suivantes.



4. *Domaine de définition.*

   (a) *Déterminez les valeurs de x pour lesquelles :* $\cos x = 0$*. Il y a une infinité de réponse : essayez de* toutes *les donner.*

   En regardant le cercle trigonométrique, le cosinus s'annule pour tous les angles égaux à $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$, plus ou moins un nombre quelconque de tours complets (c'est-à-dire plus ou moins un angle 2π). On peut noter ça en disant que la fonction cosinus s'annule pour tous les angles de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.

   (b) *En déduire le domaine de définition de la fonction tangente, en justifiant. La réponse devrait être de la forme :* « La fonction tangente est définie sur tous les nombres réels sauf … »*.*

1. Vous pouvez utiliser Geogebra en ligne sur `https://www.geogebra.org/graphing`, l'installer sur votre *smartphone* en recherchant `geogebra` dans le magasin d'application, ou l'installer sur un ordinateur librement en le téléchargeant depuis `http://www.geogebra.org`.

Donc la fonction tangente est définie pour tous les nombres réels sauf ceux où le cosinus s'annule (car puisque $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, on divise alors par 0), c'est-à-dire tous les nombres réels, sauf ceux de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.

5. Dans un triangle. *Dans cette partie, nous allons montrer que cette fonction tangente correspond à la tangente utilisée dans les triangles au collège.*

   On considère un triangle ABC, rectangle en A.

   (a) *Complétez avec vos souvenirs de collège :* $\sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC}$; $\cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC}$; $\tan \widehat{ABC} = \frac{AC}{AB}$.

   (b) *Simplifiez l'expression* $\frac{\sin \widehat{ABC}}{\cos \widehat{ABC}}$ *: vous devriez obtenir :* $\tan \widehat{ABC}$.

$$\frac{\sin \widehat{ABC}}{\cos \widehat{ABC}} = \frac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AB}{BC}} = \frac{AC}{BC} \times \frac{BC}{AB} = \frac{AC}{AB} = \tan \widehat{ABC}$$

   Donc la définition de la tangente vue au collège correspond bien à celle de la fonction tangente.

6. *Parité.*

   (a) *Calculez* $\tan \frac{\pi}{4}$ *et* $\tan -\frac{\pi}{4}$. *La fonction tangente est-elle paire ?*

   D'une part, on a : $\tan \frac{\pi}{4} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$. D'autre part, on a : $\tan -\frac{\pi}{4} = \frac{\sin -\frac{\pi}{4}}{\cos -\frac{\pi}{4}} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$.

   Donc $\tan \frac{\pi}{4} \neq \tan -\frac{\pi}{4}$, et la fonction tangente n'est pas paire.

   (b) *En utilisant votre cours, exprimez* $\sin(-x)$ *et* $\cos(-x)$ *en fonction de* $\sin x$ *et* $\cos x$. Puisque la fonction cosinus est paire, alors $\cos(-x) = \cos x$. Puisque la fonction sinus est impaire, alors $\sin(-x) = -\sin x$.

   (c) *Prouvez que la fonction tangente est impaire.* Soit x un réel du domaine de définition de la fonction tangente. Alors :

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

   Donc $\tan(-x) = -\tan x$: la fonction est impaire.

7. *Périodicité.*
   (a) *En utilisant le cercle trigonométrique, expliquer (avec plus ou moins de rigueur) que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\sin(x+\pi) = -\sin x$$
$$\cos(x+\pi) = -\cos x$$

   Par exemple, $\sin\frac{3\pi}{2} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$.

   Dans les deux cas (sinus et cosinus), ajouter π à un angle x correspond à ajouter un demi-cercle à cet angle, ce qui correspond à une rotation d'angle π (ou 180°) par rapport à l'origine du repère, c'est-à-dire une symétrie centrale par rapport à l'origine. D'où les relations demandées.

   (b) *Montrez que la fonction tangente est périodique de période π (c'est-à-dire que pour tout x de son domaine de définition, on a :* $\tan(x+\pi) = \tan x$*).*

   Soit x un réel du domaine de définition de la fonction tangente. Alors :

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

   Donc pour tout x du domaine de définition de la fonction tangente, on a $\tan(x+\pi) = \tan x$: la fonction est périodique de période π.

8. *Signe.*
   (a) *Rappelez le tableau de signes des fonctions sinus et cosinus sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$ (vu en cours).*

   Voir la question suivante.

   (b) *En déduire le tableau de signes de la fonction tangente sur le même intervalle (moins les évenutelles valeurs interdites).*

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin x$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0
$\cos x$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$\tan x$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0

(c) *En utilisant le résultat de la question 7, en déduire le tableau de signes de la fonction tangente sur l'intervalle* $[-2\pi; 2\pi]$ *(moins les éventuelles valeurs interdites).*

Puisque la fonction tangente est périodique de période π, elle est invariante par translation de vecteur $\pi\overrightarrow{\imath}$, ainsi que son tableau de signes. En d'autres termes, cela signifie que pour faire le tableau de signes de la fonction tangente, on peut prendre les signes de la fonction sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ (zone hachurée en rouge sur le tableau), et « copier-coller » ce morceau de tableau à l'infini à gauche et à droite.

x	-2π		$-\frac{3\pi}{2}$		$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\tan x$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0

9. *Variations.*

   (a) *Difficile. On admet que les fonctions sinus et cosinus sont dérivables, et que :*

— *la dérivée de la fonction* $x \mapsto \sin x$ *est* $x \mapsto \cos x$ *:* $\sin' x = \cos x$ *;*
— *la dérivée de la fonction* $x \mapsto \cos x$ *est* $x \mapsto -\sin x$ *:* $\cos' x = -\sin x$*.*

On admet que la fonction tangente est dérivable sur son domaine de définitions. Montrer que la dérivée de la fonction tangente est égale à $x \mapsto 1 + \tan^2 x$ *(où* $\tan^2 x$ *est une abréviation pour :* $(\tan x)^2$*).*

On rappelle que $\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v-v'u}{v^2}$. Donc, puisque $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, on a :

$$\begin{aligned}
\tan' x &= \frac{\sin' x \times \cos x - \cos' x \times \sin x}{(\cos x)^2} \\
&= \frac{\cos x \times \cos x - (-\sin x) \times \sin x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \\
&= 1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 \\
&= 1 + (\tan x)^2 \\
&= 1 + \tan^2 x
\end{aligned}$$

(b) *Montrez que* $1 + \tan^2 x$ *est strictement positive pour tout* x *du domaine de définition de la fonction tangente.*

Le nombre $\tan^2 x$ (qui est, rappelons-le, une abréviation pour $(\tan x)^2$), est un carré, donc positif ou nul (quelle que soit la valeur de x). Donc $1 + \tan^2 x$ est strictement positif.

La dérivée de la tangente est donc strictement positive.

(c) *En déduire les variations de la fonction tangente sur l'intervalle* $[-2\pi; 2\pi]$*, que l'on présentera dans un tableau de variations (en faisant attention aux valeurs interdites).*

x	-2π		$-\frac{3\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$1+\tan^2 x$		$+$	‖	$+$	‖	$+$	‖	$+$	‖	$+$	
$\tan$		↗	‖	↗	‖	↗	‖	↗	‖	↗	

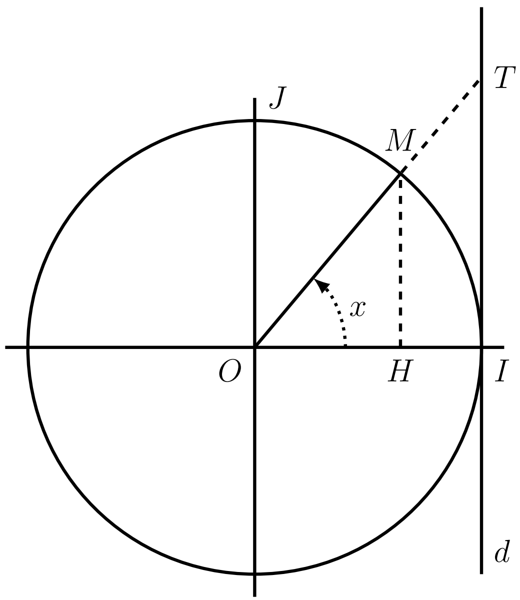


Figure 1 – Illustration de la question 2.