Exercice (Défi — Optionnel)**.**

1. *Déterminer une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui soit à la fois paire et impaire.*
2. *Montrer que cette fonction est l'unique fonction à la fois paire et impaire.*

Répondons aux deux questions en même temps.
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui soit à la fois paire et impaire (en supposant qu'elle existe), et soit x un réel quelconque. Alors :

— puisque f est paire, alors $f(x) = f(-x)$;

— puisque f est impaire, alors $-f(x) = f(-x)$.

Donc $f(-x)$ est à la fois égal à $f(x)$ et $-f(x)$, donc :

$$\begin{aligned} f(x) &= -f(x) \\ 2f(x) &= 0 \\ f(x) &= \frac{0}{2} \\ f(x) &= 0 \end{aligned}$$

Nous avons donc montré que *si* une telle fonction existe, alors $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Autrement dit, f est la fonction constante égale à 0.
Réciproquement, nous pouvons vérifier que la fonction constante égale à 0 est à la fois paire et impaire.
La seule fonction à la fois paire et impaire est donc la fonction constante nulle.